#1: Anageo mit Derive

#2: Lösung elementarer Aufgaben, Kollinearität, Komplanarität

#3: ---------------------------

#4: PA := [1, 2, 3]

#5: PB := [2, 1, -1]

#6: va := [1, 2, 3]

#7: vb := [2, 1, -1]

#8: ---------------------------

#9: a) Länge der Strecke zwischen den Punkten PA und PB?

#10: Das ist der Betrag des Differenzvektors von va und vb !

#11: $|va - vb| = 3\cdot\sqrt{2}$

#12: Von Hand wäre das:

#13: $\sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 1)^2 + (3 - -1)^2} = 3\cdot\sqrt{2}$

#14: Bildet man die Differenz umgekehrt, ergibt sich der gleiche Wert:

#15: $|vb - va| = 3\cdot\sqrt{2}$

#16: ---------------------------

#17: Mittelpunkt der Strecke AB:

#18: $mpAB := \frac{1}{2}\cdot(va + vb)$

#19: $mpAB = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right]$

#20: ---------------------------

#21: Kollinearität zweier Vektoren in 3D (Parallelität):

#22: va is kollinear zu vb, wenn vb die Verlängerung oder Verkürzung von va ist.

#23: D.h., wenn es eine reelle Zahl k gibt, für die gilt:

#24: $vb = k\cdot va$

#25: oder va = m*vb .

#26: Umgestellt: k*va + m*vb = 0 , aber k und m nicht null.

#27: Beide Vektoren liegen dann auf einer Linie, sind kollinear.

#28: Beispiel 1:

#29: va = [1, 2, 3]

#30: vb = [2, 1, -1]

#31: Prüfung:

#32: SOLVE(vb = k·va, k)

#33: false

#34: va und vb sind nicht kollinear.

#35: ----

#36: Beispiel 2:

#37: va = [1, 2, 3]

#38: vc := [2, 4, 6]

#39: vc = k·va

#40: SOLVE(vc = k·va, k)

#41: k = 2

#42: va und vc sind kollinear.

#43: ---------------------------

#44: Wenn also die Gleichung vb=k*va eine Lösung für k hat, dann sind die Vektoren va und vb parallel.

#45: Wenn aber die Gleichung vb=k*va keine Lösung für k hat, dann sind die Vektoren nicht parallel.

#46: ---------------------------

#47: Komplanarität (in einer Ebene liegend)

#48: Zwei Vektoren liegen immer in einer Ebene.

#49: Drei Vektoren liegen nur dann in einer Ebene, wenn jeder durch die beiden anderen darstellbar ist.

#50: Beispiel:

#51: va = [1, 2, 3]

#52: vb = [2, 1, -1]

#53: vd := [3, 3, 2]

#54: [3, 3, 2] = 1·[1, 2, 3] + 1·[2, 1, -1]

#55: Wenn die Gleichung vd = k*va + l*vb eine Lösung für k und l hat,
liegen va, vb und vd in einer Ebene.

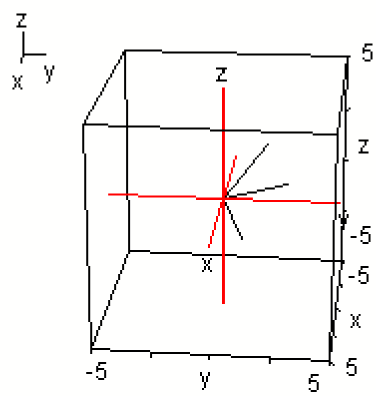
#56: Umgestellt: k*[3, 3, 2] + m·[1, 2, 3] + n·[2, 1, -1] = [0,0,0] ,
aber k,m,n nicht null.

#57: Umgekehrt: Wenn k*va + m·vb + n·vc nur dann gleich [0,0,0] ist,
wenn k,m,n alle null sind, dann liegen die drei Vektoren NICHT
in einer Ebene.

#58: ---------------------------

#59: k·[3, 3, 2] + m·[1, 2, 3] + n·[2, 1, -1] = [0, 0, 0]

#60: wird gelöst durch k=-1, m=1 und n=1. Die Vektoren liegen also in
der gleichen Ebene.

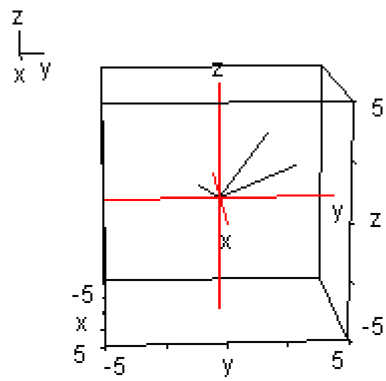


#61: Ich ändere den dritten Vektor etwas ab:

#62: k·[3, 3, 2] + m·[1, 2, 3] + n·[2, -1, 1] = [0, 0, 0]

#63: SOLVE(k·[3, 3, 2] + m·[1, 2, 3] + n·[2, -1, 1] = [0, 0, 0], [k, m,
n], Real)

#64: $k = 0 \wedge m = 0 \wedge n = 0$



#65: Alle Koeffizienten sind null: Die drei Vektoren liegen nicht alle in der gleichen Ebene. Sie sind nicht komplanar, sondern linear unabhängig!

#66: ---------------------------