#1: Das Vektorprodukt bzw. Kreuzprodukt, Blatt 2

#2: ------------------

#3: Man benötigt sehr oft zu zwei Vektoren einen dritten,

#4: der auf beiden senkrecht steht

#5: und mit den beiden ein Rechtssystem bildet.

#6: Die Berechnung eines solchen Vektors geschieht durch das 'VEKTORPRODUKT' oder KREUZPRODUKT.

#7: KREUZPRODUKT, weil man die Komponenten über Kreuz multipliziert.

#8: Man schreibt per Hand oder mit DERIVE das KREUZPRODUKT auch mit einem Kreuz.

#9: $$[4, 5, 6] \times [1, 2, 3] = [3, -6, 3]$$

#10: In Derive gibt es alternativ für das KREUZPRODUKT auch den Befehl: CROSS .

#11: ------------------

#12: Wozu kann man dass Kreuzprodukt gebrauchen?

#13: 1. Zur Bestimmung der Normalen und eines Orthonormalsystems für eine Ebene!

#14: 2. Zur Bestimmung der linearen Abhängigkeit zweier Vektoren!

#15: 3. Zur Bestimmung des Drehmoments in Physik und Technik!

#16: ------------------

#17: - Ich gebe in dieser Datei die Definition und Anwendungen

#18: - In der dritten Datei leite ich die Kreuzprodukt-Formel her.

#19: ------------------

#20: Definition: Das Ergebnis von (v × w) sehen Sie rechts.

#21: $$\mathrm{CROSS}\left(\begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \\ w3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v2 \cdot w3 - v3 \cdot w2 \\ v3 \cdot w1 - v1 \cdot w3 \\ v1 \cdot w2 - v2 \cdot w1 \end{bmatrix}$$

#22: Die Kompenten des Kreuzprodukts ergeben sich durch 'kreuzweises' Multiplizieren und Abziehen.

#23: v1*w2-v2*w1 ist das 'Kreuz' der oberen vier Komponenten. Es kommt auf die nicht benutzte Position, also die 3. Komponente im Ergebnis.

#24: v2*w3-v3*w2 ist das 'Kreuz' der unteren vier Komponenten. Es kommt auf die nicht benutzte Position, also die 1. Komponente im Ergebnis.

#25: v3*w1-v1*w3 ist das 'Kreuz' der vier Komponenten in Zeile 1 und 3. Es kommt auf die nicht benutzte Position, also die 2. Komponente im Ergebnis.

#26: ------------------

#27: 1. Anwendung:

#28: Gegeben seien zwei Vektoren.

#29: [1, 2, 3]

#30: [4, 5, 6]

#31: Gesucht: Ein Vektor der auf beiden senkrecht steht!

#32: CROSS([1, 2, 3], [4, 5, 6]) = [2·6 - 3·5, 3·4 - 1·6, 1·5 - 2·4]

#33: CROSS([1, 2, 3], [4, 5, 6]) = [-3, 6, -3]

#34: Probe des senkrechten Standes:

#35: [1, 2, 3]·[-3, 6, -3] = 0

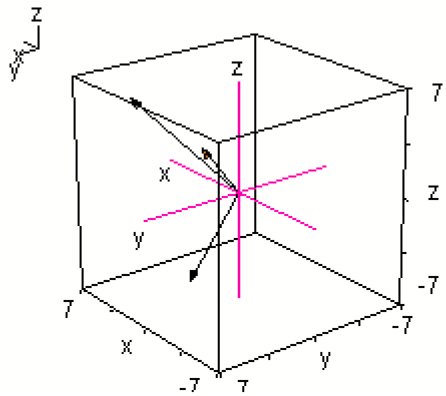
#36: [4, 5, 6]·[-3, 6, -3] = 0

#37: LOAD(C:\ProgMath\Derive61\Math\VekSpitz3D.mth)

#38: Vektor3D([0, 0, 0], [1, 2, 3], 0.2, 0.6)

#39: Vektor3D([0, 0, 0], [4, 5, 6], 0.2, 0.6)

#40: Vektor3D([0, 0, 0], [-3, 6, -3], 0.2, 0.6)



#41: -------------

#42: Wenn ich die Reihenfolge der Vektoren vertausche, ergibt sich der Gegenvektor zu obigem:

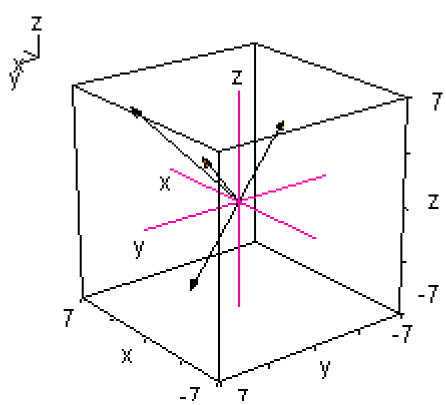
#43: CROSS([4, 5, 6], [1, 2, 3]) = [3, -6, 3]

#44: Merke: Das Kreuzprodukt ist nicht kommutativ!

#45: Es ist so konstruiert, dass die drei Vektoren v, w und (v×w) ein Rechtssystem bilden.

#46: Dabei kommt es auf die Reihenfolge an!

#47: Vektor3D([0, 0, 0], [3, -6, 3], 0.2, 0.6)



#48: Wenn v, w und (v×w) ein Rechtsystem sind, dann ist bei anderer Reihenfolge w,v und (-(v×w)) ein Rechtssystem.

#49: Unsere Basisvektoren werden diesbezüglich untersucht:

#50: CROSS([1, 0, 0], [0, 1, 0]) = [0, 0, 1]

#51: Wenn man den positiven x-Vektor auf den positiven y-Vektor dreht, dann 'dreht die Schraube' in positive z-Richtung.

#52: CROSS([0, 1, 0], [1, 0, 0]) = [0, 0, -1]

#53: Wenn man den positiven y-Vektor auf den positiven x-Vektor dreht, also nach links, dann 'dreht die Schraube' in negative z-Richtung.

#54: -------------

#55: 2. Anwendung:

#56: Test der linearen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit

#57: $\text{CROSS}([1, 2, 3], [2, 4, 6]) = [2\cdot6 - 3\cdot4, 3\cdot2 - 1\cdot6, 1\cdot4 - 2\cdot2]$

#58: $\text{CROSS}([1, 2, 3], [2, 4, 6]) = [0, 0, 0]$

#59: Merke: Das Kreuzprodukt von linear abhängigen Vektoren ist der Nullvektor!

#60: Ist das Kreuzprodukt von zwei Vektoren nicht der Nullvektor, sind sie linear unhängig!

#61: -------------

#62: 3. Anwendung, die häufigste in AnaGeo: Normalen und Orthonormalsystem für Ebenen herstellen

#63: 3a. Normalen

#64: Gegeben sei eine Ebene:

#65: $eb(s, t) := [1, 1, 1] + s\cdot[1, 2, 3] + t\cdot[3, 1, 3]$

#66: Gesucht ist eine Normale der Ebene:

#67: $\text{CROSS}([1, 2, 3], [3, 1, 3]) = [3, 6, -5]$

#68: $vn := [3, 6, -5]$

#69: Normaleneinheitsvektor:

#70: $vne := \dfrac{vn}{|vn|}$

#71: -------------

#72: Es geht noch schneller:

#73: $vne2 := \dfrac{[1, 2, 3] \times [3, 1, 3]}{|[1, 2, 3] \times [3, 1, 3]|}$

#74: -------------

#75: 3b. Orthonormales System für eine Ebene herstellen

#76: Gegeben sei eine Ebene:

#77: $eb(s, t) := [1, 1, 1] + s\cdot[1, 2, 3] + t\cdot[3, 1, 3]$

#78: Normaleneinheitsvektor:

#79: $$vne3 := \frac{[1, 2, 3] \times [3, 1, 3]}{|[1, 2, 3] \times [3, 1, 3]|}$$

#80: Der Normaleneinheitsvektor steht senkrecht auf beiden Richtungsvektoren.

#81: Das Kreuzprodukt aus Normaleneinheitsvektor und einem Richtungsvektoren ergibt einen dritten Vektor.

#82: Der dritte Vektor muss wieder in der Ebene liegen, es ist ein Richtungsvektor.

#83: Die drei bilden ein Rechtssystem.

#84: $vri3 := vne3 \times [1, 2, 3]$

#85: Jetzt normiere ich noch die Richtungsvektoren:

#86: $$vri1e := \frac{[1, 2, 3]}{|[1, 2, 3]|}$$

#87: $$vri3e := \frac{vri3}{|vri3|}$$

#88: Nun bilden vne3, vri1e und vri3e ein orthonormales Rechtssystem.

#89: $ebneu(s, t) := [1, 1, 1] + s\cdot vri1e + t\cdot vri3e$

#90: ---------------------

#91: Proben:

#92: $vne3\cdot vri1e = 0$

#93: $vne3\cdot vri3e = 0$

#94: $vri1e\cdot vri3e = 0$

#95: ---------------------

#96: Werte:

$$\left[\; 3\cdot\sqrt{70} \qquad 3\cdot\sqrt{70} \qquad \sqrt{70} \;\right]$$

#97: $vne3 = \left[\frac{}{70}, \frac{}{35}, -\frac{}{14}\right]$

#98: $vri1e = \left[\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{3\cdot\sqrt{14}}{14}\right]$

#99: $vri3e = \left[\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right]$

#100: ---------------------

#101: Zeichnung:

#102: va :≈ [1, 1, 1]

#103: Vektor3D([0, 0, 0], va, 0.2, 0.6)

#104: Vektor3D(va, va + vri1e, 0.2, 0.6)

#105: Vektor3D(va, va − vri1e, 0.2, 0.6)

#106: Vektor3D(va, va + vri3e, 0.2, 0.6)

#107: Vektor3D(va, va − vri3e, 0.2, 0.6)

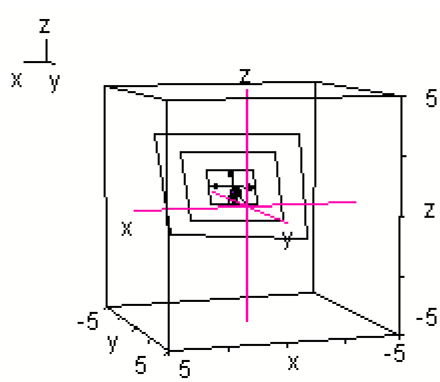
#108: Vektor3D(va, va + vne, 0.2, 0.6)

#109: plotebene(k) :≈ [ebneu(k, k), ebneu(−k, k), ebneu(−k, −k), ebneu(k, −k), ebneu(k, k)]

#110: plotebene(1)

#111: plotebene(2)

#112: plotebene(3)



#113: ---------------------