#1: Kugel: Schnitte mit Geraden

#2: ---------------

#3: Aufgabe:

#4: Gegeben ist eine Gerade g:

#5: $g(s) := [1, \sqrt{2} + 1, 3 - \sqrt{2}] + s\cdot[0, \sqrt{3} - \sqrt{2}, \sqrt{2} - \sqrt{3}]$

#6: und eine Kugel:

#7: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1^2$

#8: In welchen Punkten schneidet die Gerade die Kugel?

#9: (MP=[1,2,3] und r=1)

#10: -------------

#11: Lösung

#12: 1. Man kann nicht 'gleichsetzen', weil die Kugel nur implizit gegeben ist, nicht durch eine Funktion K(x,y,z).

#13: Aber die x-y-z-Werte der Geraden müssen die x-y-z-Werte der Kugel sein!

#14: Ich lasse die x-y-z-Werte der Geraden ausrechnen mit g(s)=.

#15: $g(s) = [1, s\cdot(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \sqrt{2} + 1, s\cdot(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{2} + 3]$

#16: Nun erkennt man x, y und z der Geraden:

#17: $gx := 1$

#18: $gy := s\cdot(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \sqrt{2} + 1$

#19: $gz := s\cdot(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{2} + 3$

#20: Die Kugelgleichung war:

#21: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1^2$

#22: Ich setze gx für x, gy für y und gz für z ein:

#23: $(gx - 1)^2 + (gy - 2)^2 + (gz - 3)^2 = 1^2$

#24: $s^2\cdot(10 - 4\cdot\sqrt{6}) + s\cdot(4\cdot\sqrt{6} - 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{2} - 8) - 2\cdot\sqrt{2} + 5 = 1$

#25: Es ist ersichtlich, dass es jetzt nur noch eine Variable gibt, nämlich s!

#26: Das lasse ich lösen:

#27: $\text{SOLVE}((gx - 1)^2 + (gy - 2)^2 + (gz - 3)^2 = 1^2, s)$

#28: $s = - \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2 \lor s = - \sqrt{6} - 2$

#29: Wegen des Quadrats von s gibt es zwei Lösungen:

#30: $\text{sLsg1} := - \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$

#31: $\text{sLsg2} := - \sqrt{6} - 2$

#32: Die beiden Lösungen setze ich bei g ein:

#33: $g(\text{sLsg1}) = [1, 2, 2]$

#34: $g(\text{sLsg2}) = [1, 1, 3]$

#35: Die Kugel wird in zwei Punkten durchstoßen:

#36: $\text{DP1} := [1, 2, 2]$

#37: $\text{DP2} := [1, 1, 3]$

#38: ---------------

#39: Aufgabe:

#40: 1. Erfinden Sie eine andere Kugel, die im normalen ±5–±5–±5–Raum zu zeichnen ist.

#41: Bitte nicht im Ursprung. Das ist zu einfach.

#42: 2. Erfinden Sie eine Gerade, welche diese Kugel durchstößt, aber nicht durch den Mittelpunkt geht.

#43: 3. Berechnen Sie die Durchstoßpunkte Ihrer Geraden durch Ihre Kugel.

#44: ---------------

#45: Vorbereitungen für die Zeichnung:

#46: $\text{MP} := [1, 2, 3]$

#47: Punkte von Kugeln im Ursprung:

#48: $\text{KuPu}(r, L, B) := r \cdot [\text{COS}(B) \cdot \text{COS}(L), \text{COS}(B) \cdot \text{SIN}(L), \text{SIN}(B)]$

#49: Hier Kugel um MP:

#50: $\text{KuPuHier}(L, B) := 1 \cdot [\text{COS}(B) \cdot \text{COS}(L), \text{COS}(B) \cdot \text{SIN}(L), \text{SIN}(B)] + \text{MP}$

#51: Ein Breitenkreis:

#52: BKreis(B) := VECTOR(KuPuHier(L, B), L, 0°, 360°, 5°)

#53: Viele Breitenkreise bilden Kugel:

#54: Kugel_hier := VECTOR([BKreis(B)], B, − 90°, 90°, 10°)

#55: $\mathrm{Hilfslinien}(x, y, z) := \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ x & y & 0 \\ 0 & y & 0 \\ x & y & 0 \\ x & y & z \end{bmatrix}$

#56: MP_Hilfslinien := Hilfslinien(1, 2, 3)

#57: DP1_Hilfslinien := Hilfslinien(1, 2, 2)

#58: DP2_Hilfslinien := Hilfslinien(1, 1, 3)

#59: ---------------

#60: Nacheinander zeichnen lassen:

#61: MP

#62: MP_Hilfslinien

#63: DP1

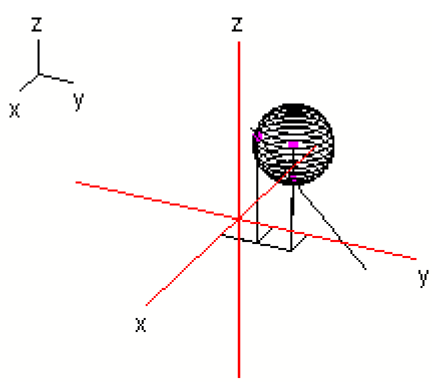
#64: DP1_Hilfslinien

#65: DP2

#66: DP2_Hilfslinien

#67: g(s)

#68: Kugel_hier



#69: ---------------