#1: Kurven in 2D

#2: --

#3: Kurven in 2D entstehen, wenn man die Komponenten x und y als Funktionen von t definiert.

#4: Die allgemeine Form ist also:

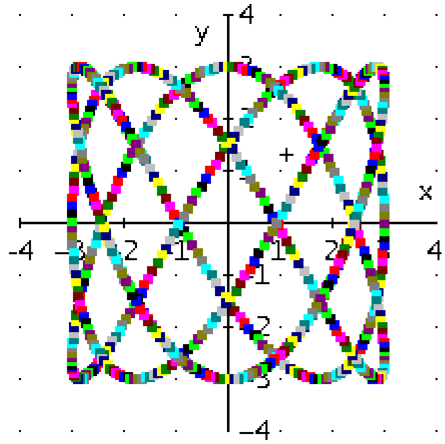
#5: k2d(t) := [fx(t), fy(t)]

#6: --

#7: Beispiel (Lissjou in der Ebene):

#8: k2d1(t) := [3·SIN(3·t), 3·COS(5·t)]

#9: VECTOR([k2d1(t)], t, -4, 4, 0.01)

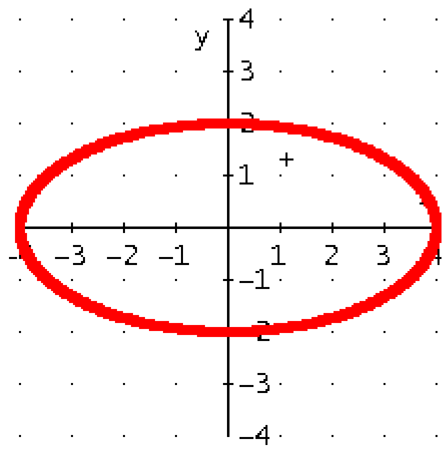


#10: --

#11: Beispiel: Ellipse in der 2D-Ebene:

#12: k2d2(t) := [4·COS(t), 2·SIN(t)]

#13: VECTOR([k2d2(t)], t, 0, 2·π, 1°)

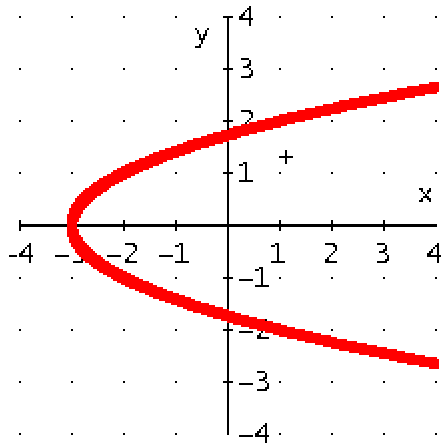


#14: --

#15: Beispiel: Parabel in der 2D-Ebene, liegend:

#16: $k2d3(t) := [t^2 - 3, t]$

#17: VECTOR([k2d3(t)], t, -4, 4, 0.01)

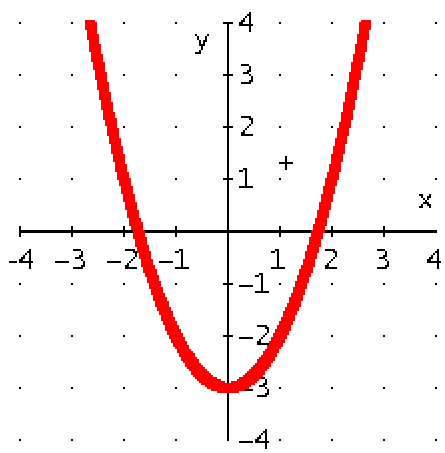


#18: --

#19: Beispiel: Parabel in der 2D-Ebene, stehend:

#20: $k2d4(t) := [t, t^2 - 3]$

#21: VECTOR([k2d4(t)], t, -4, 4, 0.01)



#22: --

#23: Beispiel: Parabel in der 2D-Ebene, gedreht:

#24: $k2d4(t) = [t, t^2 - 3] = t\cdot[1, 0] + (t^2 - 3)\cdot[0, 1]$

#25: Wenn ich die obigen Richtungsvektoren durch zwei andere orthogonale Richtungsvektoren der Länge 1 ersetze, wird die

Parabel gedreht. Ich drehe obige Einheitsvektoren um 45° gegen den Uhrzeigersinn::

#26: $\text{vri1} := \dfrac{[1, 1]}{|[1, 1]|}$

#27: $\text{vri2} := \dfrac{[-1, 1]}{|[-1, 1]|}$

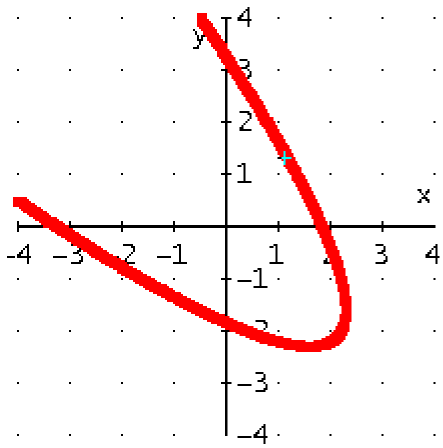
#28: Länge 1 ist klar. Sie sind orthogonal, denn:

#29: $$\text{vri1} \bullet \text{vri2} = 0$$

#30: Ich definiere deshalb:

#31: $\text{k2d5}(t) := t\cdot\text{vri1} + (t^2 - 3)\cdot\text{vri2}$

#32: VECTOR([k2d5(t)], t, -4, 4, 0.01)



#33: Man beachte: Die Kurve ist eine Funktion von t, weil jedem t genau ein Vektor zugeordnet wird:

#34: $$\text{k2d5}(t) = \left[- \frac{\sqrt{2}\cdot t^2}{2} + \frac{\sqrt{2}\cdot t}{2} + \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}\cdot t^2}{2} + \frac{\sqrt{2}\cdot t}{2} - \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$$

#35: Aber der Graph stellt keine Funktion von x mehr dar, weil jedem x-Wert zwei y-Werte zugeordnet werden.

#36: ---

#37: Wie beweist man, dass der Graph von k2d5(t) keine Funktion von x darstellt?

#38: Man sieht z.B. dass bei x=0 zwei Werte angenommen werden, da ist y ungefähr −2 und 3.

#39: Für welches t wird aber der x−Wert von k2d5 null? Ich lassen einfach den x−Wert von k2d5 nach t lösen:

#40: $(k2d5(t))_1 = 0$

#41: $$-\frac{\sqrt{2}\cdot t^2}{2} + \frac{\sqrt{2}\cdot t}{2} + \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} = 0$$

#42: $$\mathrm{SOLVE}\left(-\frac{\sqrt{2}\cdot t^2}{2} + \frac{\sqrt{2}\cdot t}{2} + \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} = 0,\ t,\ \mathrm{Real}\right)$$

#43: $$t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \vee t = \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{1}{2}$$

#44: $$t1 := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

#45: $$t2 := \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{1}{2}$$

#46: Jetzt berechnen wir k2d5 für t1 und t2:

#47: $$k2d5(t1) = \left[0,\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{26}}{2}\right]$$

#48: $$k2d5(t2) = \left[0,\ \frac{\sqrt{26}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

#49: Damit ist bewiesen, dass zum x−Wert 0 zwei verschiedene y−Werte des Graphen existieren.

#50: Also kann dieser Graph nicht der Graph einer Funktion sein, die jedem x genau ein y zuordnet.

#51: −−