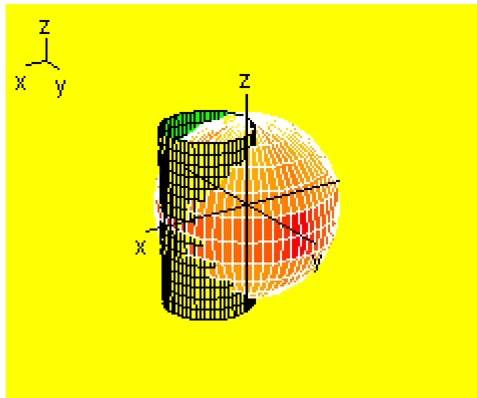
#1: Viviani-Kurve (parametrische Herleitung)

#2: --

#3: Eine Kugel und ein Zylinder schneiden sich. Der Zylinder hat den halben Kugelradius. Eine Zylinderaußenlinie liegt in der Kugelachse.



#4: --

#5: Zur Zeichnung:

#6: Kugelpunkt(r, B, L) ≔ r·[COS(B)·COS(L), COS(B)·SIN(L), SIN(B)]

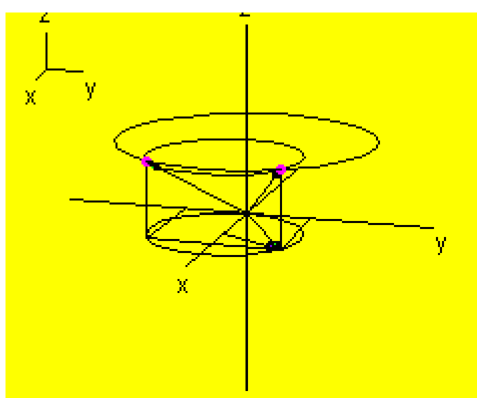
#7: VECTOR(VECTOR(Kugelpunkt(4, B, L), B, - 90°, 90°, 15°), L, 0, 360°, 6°)

#8: Zylinderpunkt(MP, r, t, z) ≔ MP + [r·COS(t), r·SIN(t), z]

#9: VECTOR(VECTOR(Zylinderpunkt([2, 0, 0], 2, t, z), t, 0, 360°, 6°), z, -4, 4, 0.5)

#10: --

#11: Wir betrachten einen Breitenkreis und einen Zylinderkreis.



#12: In den Schnittpunkten müssen zunächst die z-Werte von Kugel und

Zylinder übereinstimmen.

#13: [4·COS(B)·COS(L), 4·COS(B)·SIN(L), 4·SIN(B)]

#14: [2·COS(t) + 2, 2·SIN(t), 4·SIN(B)]

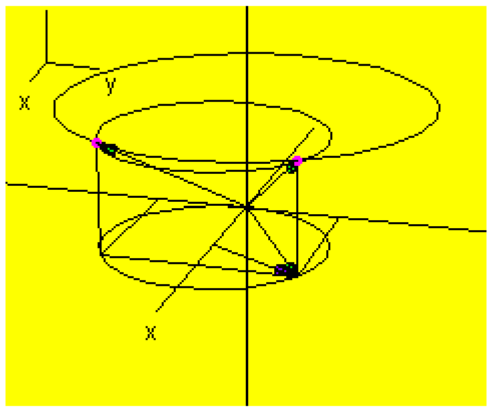
#15: L ist der Winkel um den sich der Kugelpunkt um die z-Achse gedreht hat.

#16: t ist der Winkel um den sich der Zylinderpunkt um die Achse [2,0,z] gedreht hat.

#17: Die Projektion des Schnittpunktes auf die x-y-Ebene:

#18: proj := [4·COS(B)·COS(L), 4·COS(B)·SIN(L), 0]

#19: liegt auf dem Zylinderkreis in der x-y-Ebene.



#20: Der Winkel zwischen Projektion und x-Achse ist der Winkel L des Schnittpunktes bzgl. der Kugel.

#21: Der Winkel zwischen dem zugehörigen Radiusvektor des Zylinders und der x-Achse ist t.

#22: Der Winkel t ist doppelt so groß wie L, also t=2L nach dem Peripherie-Winkelsatz.

#23: Der besagt, das der Periheriewinkel über einer Sehne halb so groß ist wie der zugehörige Zentriwinkel.

#24: Kugelpunkt und Zylinderpunkt müssen gleich sein:

#25: [4·COS(B)·COS(L), 4·COS(B)·SIN(L), 4·SIN(B)]

#26: [2·COS(t) + 2, 2·SIN(t), 4·SIN(B)]

#27: Das bedeutet, dass die y-Komponenten gleich sein müssen:

#28: $2\cdot SIN(t) = 4\cdot COS(B)\cdot SIN(L)$

#29: Es gilt t = 2L:

#30: $2\cdot SIN(2\cdot L) = 4\cdot COS(B)\cdot SIN(L)$

#31: Es gilt allgemein: $SIN(2\cdot\alpha) = 2\cdot COS(\alpha)\cdot SIN(\alpha)$. Also gilt:

#32: $2\cdot 2\cdot COS(L)\cdot SIN(L) = 4\cdot COS(B)\cdot SIN(L)$

#33: $COS(L)\cdot SIN(L) = COS(B)\cdot SIN(L)$

#34: $COS(L) = COS(B)$

#35: Das kann nur stimmen, wenn L=B ist.

#36: Der Drehwinkel L auf der Kugel, die geodätische Länge, stimmt mit der Breite B überein!

#37: Wir können also für die Schnittpunkte

#38: $[4\cdot COS(B)\cdot COS(L),\ 4\cdot COS(B)\cdot SIN(L),\ 4\cdot SIN(B)]$

#39: den Winkel L durch B ersetzen:

#40: $vivi(B) := [4\cdot COS(B)\cdot COS(B),\ 4\cdot COS(B)\cdot SIN(B),\ 4\cdot SIN(B)]$

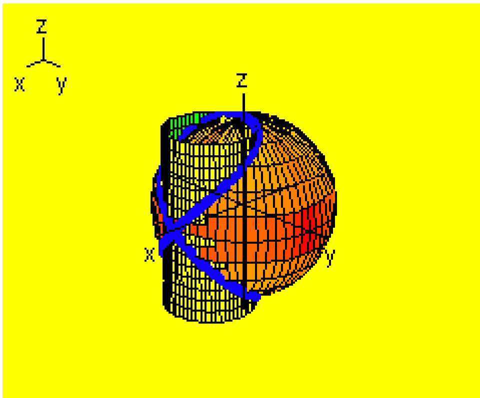
#41: --------------------------------

#42: $viviani(t) := 4\cdot\left[COS(t)^2,\ SIN(t)\cdot COS(t),\ SIN(t)\right]$

#43: Es ist einfach die Kugelgleichung für L=B .

#44: --------------------------------

#45: VECTOR([viviani(t)], t, 0, 360°, 1°)



#46: --------------------------------

#47: Merke:

#48: Die Viviani–Kurve ist der Ort aller Punkte mit betragsgleicher
Länge und Breite auf der Kugel.

#49: --------------------------------

#50: Mögliche Verallgemeinerungen:

#51: Gleiche Problemstellung für Zylinder und Torus gibt die Kurve des
Archytas.

#52: Was ist, wenn der Zylinder kleineren oder größeren Radius hat?

#53: Welche Kurve ergibt sich bei Schnitt von Zylinder mit Zylinder
(Rohr–Verbindungen)?

#54: --------------------------------