#1: Eine Kranaufgabe höherer Stufe

#2: --------------------------------------

#3: Der Kran ist 5 E hoch, der Ausleger sei 5 E lang.

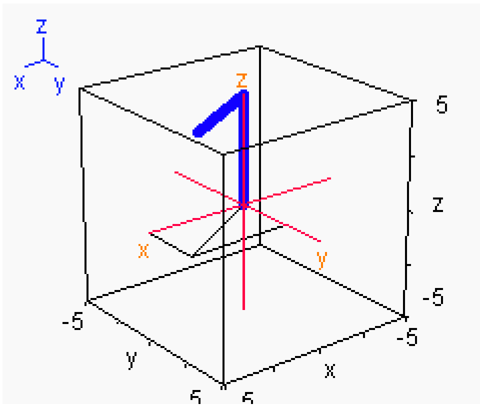
#4: Der Kran steht in [0,0,0] und ist nicht fahrbar.

#5: Der Ausleger stand über der positiven x-Achse und hat sich etwas in Richtung positiver y-Achse gedreht.

#6: Der Ausleger stehe jetzt in Richtung [5 , 5/$\sqrt{3}$, 0]; in Richtung, nicht auf [5 , 5/$\sqrt{3}$, 0].

#7: Die Katze ist ganz nach vorne ausgefahren.

#8: Die Last am Haken liege noch auf dem Boden.

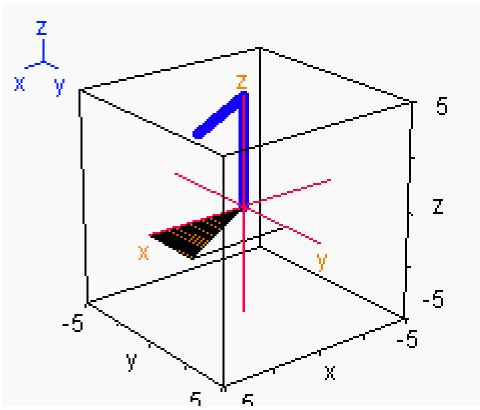


#9: --------------------------------------

#10: a) Um wieviel Grad hat sich der Ausleger gedreht?

#11: Lösung zu a)

#12: Der Ausleger ist 5 lang und hat sich von seiner Position über der x-Achse etliche Grad in Richtung der positiven y-Achse gedreht.



#13: Das schraffierte Dreieck hat die Eckpunkte: [0,0,0] - [5,0,0] -

$[5,5/\sqrt{3},0] - [0,0,0]$.

#14: Es ist rechtwinklig und nach Definition des Tangens gilt für den Winkel α bei [0,0,0]

#15: $$\mathrm{TAN}(\alpha) = \frac{\frac{5}{\sqrt{3}}}{5}$$

#16: weil die Gegenkathete $y=5/\sqrt{3}$ ist und die Ankathete x=5 ist.

#17: Der Winkel α ist der Winkel im Ursprung, um den sich der Ausleger in Richtung positiver y-Achse gedreht hat.

#18: $$\mathrm{Start}\alpha := \mathrm{ARCTAN}\left(\frac{\frac{5}{\sqrt{3}}}{5}\right)$$

#19: $$\mathrm{Start}\alpha := 30$$

#20: Der Startwinkel beträgt also 30 Grad.

Hinweis: Mit ATAN(x) bekommt man den Winkel im Bogenmaß ausgegeben.
Mit ARCTAN(x) bekommt man den Winkel gleich im Gradmaß angezeigt.
Entsprechend wirken ASIN und ARCSIN usw.

#21: ---------------------------------------

#22: ---------------------------------------

#23: b) Auf welchem Punkt liegt die Last?

#24: Lösung zu b)

#25: Die Katze ist ganz vorn an der Spitze des Auslegers.

#26: Gesucht sind also Ankathete(=x) und Gegenkathete(=y) in einem Dreieck mit dem Winkel 30° und der Hypotenuse 5.

#27: $$\mathrm{COS}(\mathrm{Start}\alpha°) = \frac{a}{5}$$

#28: $$\mathrm{SOLVE}\left(\mathrm{COS}(\mathrm{Start}\alpha°) = \frac{a}{5},\ a,\ \mathrm{Real}\right)$$

#29: $a = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}$

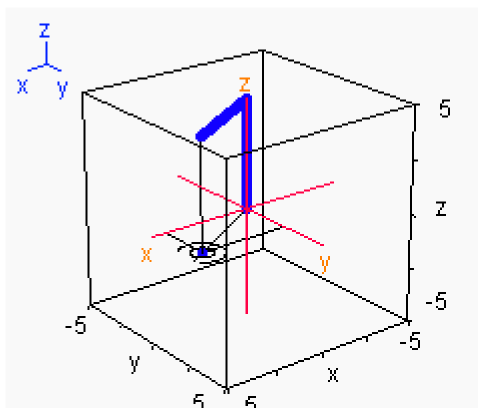
#30: $\mathrm{SIN}(\mathrm{Start}\alpha°) = \frac{b}{5}$

#31: $\mathrm{SOLVE}\left(\mathrm{SIN}(\mathrm{Start}\alpha°) = \frac{b}{5}, b, \mathrm{Real}\right)$

#32: $b = \frac{5}{2}$

#33: Also ist der gesuchte Startpunkt:

#34: $\mathrm{StartP} := \left[\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}, 0\right]$



#35: --------------------------------------

#36: --------------------------------------

#37: c) Die Last soll vom Punkt StartP auf den Punkt Ziel1 gebracht werden und darf auf dem Boden entlang geschrammt werden.

#38: $\mathrm{Ziel1} := \left[-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right]$

#39: Welche Kurve fährt die Last? Zeichnen Sie die Kurve!

#40: Lösung zu c)

#41: Der Startpunkt ist [5·√3/2, 5/2, 0].

#42: Da der Zielpunkt die negierten Koordinaten des Startpunktes hat, liegt der Zielpunkt dem Startpunkt diametral gegenüber.

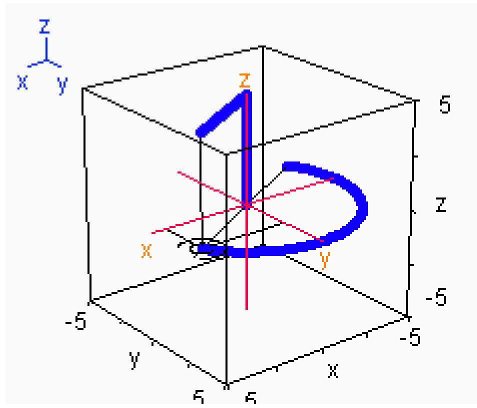
#43: Der Ausleger muss sich also um 180° drehen.

#44: Da der Startpunkt schon auf 30° liegt, geht es um eine Drehung von 30° auf 210° mit dem Radius 5.

#45: Drehkreispunkt(t) := [5·COS(t), 5·SIN(t), 0]

#46: Bahnpunkte := VECTOR([Drehkreispunkt(t)], t, 30°, 210°, 2°)

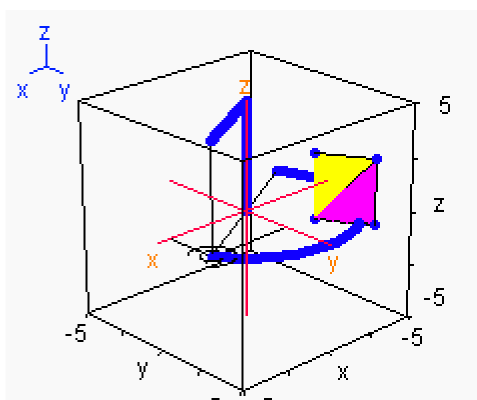
#47: Bahnpunkte



#48: --

#49: --

#50: d) Leider ist inzwischen genau auf der Hälfte der Kreisbahn ein Haus von 3 E Höhe gebaut worden.



#51: Wie kann der Kranfahrer jetzt die Last vom Start zum Ziel bringen?

#52: Lösung zu d)

#53: Er muss offensichtlich die Last in einem Bogen anheben und wieder absenken.

#54: Die Drehkreispunkte müssen in der z-Komponente eine Hubfunktion haben.

#55: hub(t) :=

#56: Drehkreispunkt2(t) := [5·COS(t), 5·SIN(t), hub(t)]

#57: Der Hub startet bei 30° (π/6) und muss dort noch null sein.

#58: Der Hub muss bei 210° (π+π/6) auch wieder null sein.

#59: Und bei 120°(π/2 + π/6) muss die Last höher als 3 sein, z.B. 4.

#60: Wenn ich als elegante Hubfunktion eine Parabel annehme, dann habe ich jetzt zwei Nullstellen und den Scheitelwert.

#61: hub(t) := k·(t - a)·(t - b)

#62: Es ist a=π/6 und b=π+π/6 :

#63: $\text{hub}(t) := k\cdot\left(t - \dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\left(t - \left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

#64: Mit dem Wert für hub(120°) bestimme ich k:

#65: hub(120°) = 4

#66: SOLVE(hub(120°) = 4, k, Real)

#67: $$k = -\frac{16}{\pi^2}$$

#68: Jetzt habe ich die Lösung:

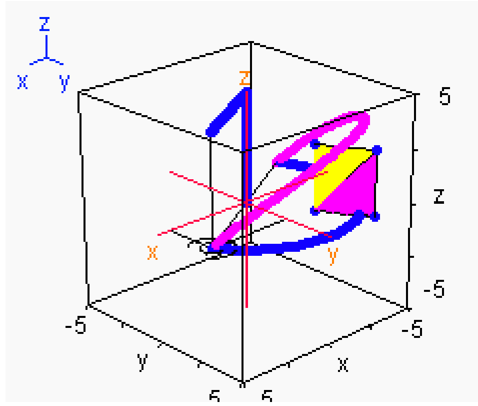
#69: $\text{hubLsg}(t) := -\dfrac{16}{\pi^2}\cdot\left(t - \dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\left(t - \left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

#70: Drehkreispunkt2Lsg(t) := [5·COS(t), 5·SIN(t), hubLsg(t)]

Achtung! Die 5 darf nicht VOR der Klammer stehen, weil sonst HUB(t) auch mit 5 malgenommen wird.

#71: Bahn2 := VECTOR([Drehkreispunkt2Lsg(t)], t, 30°, 210°, 2°)

#72: Bahn2



#73:   --------------------------------------

#74:   Das war es.

#75:   --------------------------------------