- #1: Integralrechnung I: Überblick
- #2: -----
- #3: Differenzieren bedeutet die Bestimmung der Tangentensteigung einer Funktion. (Im Raum Steigungen der Tangentialflächen)
- #4: Das Ergebnis ist die Ableitungsfunktion, die jedem x die Steigung des Graphen von f zuordnet.
- #5: Integrieren bedeutet zweierlei:
- #6: a) Die –unbestimmte– Integration stellt aus einer Ableitung wieder die Stammfunktion her.
- #7: b) Die –bestimmte– Integration berechnet die Fläche unter einem Funktionsgraphen. (Im Raum: das Volumen)
- #8: Differentiation und Integration sind also entgegengesetzte Operationen, aber nicht für alle Funktionen!
- #9: Zum Einen lassen sich ja nicht alle Funktionen differenzieren, also kann man das auch nicht umkehren.
- #10: Zum Anderen sind nicht alle Funktionen die Ableitung einer Stammfunktion, also kann man die Stammfunktion auch durch Integration nicht herstellen. Beispiel: $\sin(1/x)$ ist keine Ableitung einer Funktion. Es gibt also keine Stammfunktion.
- #11: Und zum Dritten gilt: Wenn man ein Stammfunktion findet, dann kann man damit das bestimmte Integral leicht berechnen.
- #12: Wenn man aber keine Stammfunktion findet, dann kann man das bestimmte Integral evtl. trotzdem durch Näherung berechnen. Die näherungsweise Berechnung gelingt fast immer, das kann man sogar mechanisch machen, mit einem Planimeter.
- #13: Die eigentliche Herausforderung ist die Suche nach der Stammfunktion. Und leider gibt es dafür keine Automatik, wie beim Differenzieren, also keine Formeln, mit denen man fast immer eine Stammfunktion findet.

#14: Deshalb ist das Integrieren auch heute noch ein Forschungsgebiet,
es heißt Differentialgleichungen.

#15: -----

#16: Beispiel eines typischen Problems der Differentialgleichungen

#17: Gegeben ist die Ableitung einer Funktion f:

$$\#18: f'(x) := 2 \cdot \cos^2(x) - 1$$

#19: Gesucht ist die Stammfunktion von f', also F(x).

#20: Im Prinzip geschieht die Lösung, indem man auf beiden Seiten
integriert:

$$\#21: F(x) = \int f'(x) dx = \int (2 \cdot \cos^2(x) - 1) dx$$

#22: -----

#23: Aber wie finde ich eine Stammfunktion von $2 \cdot \cos^2(x) - 1$?

#24: Mit Potenz erhöhen oder $\sin^2$ ist da so schnell nichts zu finden.

#25: Ich mache es hier einmal vor, damit Sie die Komplexität erkennen.
Können müssen Sie das in der Schule nicht.

#26: Zuerst zerlegen wir das Integral in Teilintegrale:

$$\#27: \int 2 \cdot \cos^2(x) dx - \int 1 dx$$

Die 2 können wir vorziehen.

$$\#28: 2 \cdot \int \cos^2(x) dx - \int 1 dx$$

#29: Einer Formelsammlung kann man entnehmen:

$$\int \cos^2(ax + b) dx \rightarrow \frac{\cos(ax + b) \cdot \sin(ax + b)}{2 \cdot a} + \frac{x}{2}$$

#30: Mit a=1 und b=0 kann das erste Integral geknackt werden:

$$\#31: 2 \cdot \left(\frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{2} + \frac{x}{2} \right) - \int 1 dx$$

#32: Die Stammfunktion von 1 ist x:

$$\#33: 2 \cdot \left(\frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{2} + \frac{x}{2} \right) - x$$

(2 2)

#34: Die 2 kürzt sich raus:

#35: $(\sin(x) \cdot \cos(x) + x) - x$

#36: Es bleibt:

#37: $\sin(x) \cdot \cos(x)$

#38: Das ist die gesuchte Stammfunktion.

#39: -----

#40: Probe:

#41: $\frac{d}{dx} (\sin(x) \cdot \cos(x)) = 2 \cdot \cos(x)^2 - 1$

#42: -----