#1: Bogenlänge von Kurven im Raum, die parameterabhängig definiert sind.

#2: ------------------------

#3: $x(t) :=$

#4: $y(t) :=$

#5: $z(t) :=$

#6: $s(t) :=$

#7: $\Delta t :=$

#8: Gegeben sei:

#9: $f(t) := [x(t), y(t), z(t)]$

#10: Welche Länge hat die Kurve (der Bogen) ?

#11: Voraussetzung ist natürlich, dass die Kurve stetig ist.

#12: ------------------------

#13: s(t) sei die Funktion, welche die Bogenlänge angibt.

#14: An der Stelle t nähern wir ein Stück des Bogens durch die Sekante an:

#15: $s(t + \Delta t) - s(t) = |f(t + \Delta t) - f(t)|$

#16: (Hier müsste 'ungefähr gleich' stehen. Das Zeichen akzeptiert Derive aber nicht.)

#17: Wir rechnen die rechte Seite aus:

#18: $s(t + \Delta t) - s(t) = |[x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t), z(t + \Delta t) - z(t)]|$

#19: Um die Funktion s zu bestimmen, bilden wir die Ableitung, denn das Integral von s' ist s.

#20: Wir teilen auf beiden Seiten durch $\Delta t$ :

#21: $$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \left|\left[\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}\right]\right|$$

#22: Für Δt gegen null ergeben sich die Ableitungen:

#23: $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \left| \left[ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right] \right|$$

#24: $s'(t) = \left|[x'(t), y'(t), z'(t)]\right|$

#25: $\int s'(t)\, dt = \int \left|[x'(t), y'(t), z'(t)]\right|\, dt$

#26: ------------------------

#27: $s(t) = \int \left|f'(t)\right|\, dt$

#28: Das ist die Bogenlänge! Einfach Integral über den Absolutbetrag der Ableitung.

#29: ------------------------

#30: Test mit einem Voll-Kreis in der y-z-Ebene:

#31: g(t) := [0, COS(t), SIN(t)]

#32: g_(t) := [0, - SIN(t), COS(t)]

#33: $\int_0^{2\cdot\pi} \left|g\_(t)\right|\, dt$

#34: $2\cdot\pi$

#35: ------------------------

#36: Test mit einem Wendel:

#37: h(t) := [t, COS(t), SIN(t)]

#38: h_(t) := [1, - SIN(t), COS(t)]

#39: $\int_0^{2\cdot\pi} \left|h\_(t)\right|\, dt$

#40: $2\cdot\sqrt{2}\cdot\pi$

#41: ------------------------

#42: Auch die Formel für Kurven in 2D ergibt sich.

#43: Eine Kurve in der x-y-Ebene als 3d-Funktion hat die Gestalt:

#44: k(t) := [t, j(t), 0]

#45: $k\_(t) :\!= [1, j'(t), 0]$

#46: $\int |k\_(t)|\, dt = \int \sqrt{1 + j'(t)^2}\, dt$

#47: Das ist die Formel für die Bogenlänge in 2D.

#48: ------------------------

#49: Sinuskurve in 2D geschrieben als Kurve in 3D:

#50: $si(t) :\!= [t, \mathrm{SIN}(t), 0]$

#51: $si\_(t) :\!= [1, \mathrm{COS}(t), 0]$

#52: $\int_0^{\pi} |si\_(t)|\, dt$

#53: $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \mathrm{COS}(t)^2}\, dt$

#54: 3.820197789

#55: ------------------------

#56: Länge des Bogens einer Parabel:

#57: $p(t) :\!= \left[t, t^2, 0\right]$

#58: $\frac{d}{dt} \left[t, t^2, 0\right] = [1, 2\cdot t, 0]$

#59: $p\_(t) :\!= [1, 2\cdot t, 0]$

#60: $|p\_(t)| = \sqrt{4\cdot t^2 + 1}$

#61: $\int \sqrt{4\cdot t^2 + 1}\, dt = \frac{\mathrm{LN}(\sqrt{4\cdot t^2 + 1} + 2\cdot t)}{4} + \frac{t\cdot\sqrt{4\cdot t^2 + 1}}{2}$

#62: $\int_{-1}^{1} \sqrt{4\cdot t^2 + 1}\, dt = \frac{\mathrm{LN}(\sqrt{5} + 2)}{2} + \sqrt{5}$

#63: $\int_{-1}^{1} \sqrt{4\cdot t^2 + 1}\, dt = 2.957885715$

#64: ------------------------

#65: Test mit einem Halb-Kreis in der x-y-Ebene:

#66: $hk(t) :\approx \left[t, \sqrt{(1 - t^2)}, 0\right]$

#67: $hk\_(t) :\approx \left[1, - \dfrac{t}{\sqrt{(1 - t^2)}}, 0\right]$

#68: $|hk\_(t)| = \sqrt{\left(\dfrac{2 \cdot t^2 - 1}{t^2 - 1}\right)}$

#69: $\int_{-1}^{1} |hk\_(t)| \, dt = \pi$

#70: ------------------------