DERIVE

LEKTIONEN
für
Lehrerinnen und Lehrer
zum
Ausprobieren und Nachschlagen
mit vielen Beispielen

von Hasso B. Manthey
Mai 2002

Inhalt

Was ist und kann DERIVE?

Geschichte und Verbreitung

Derive ist älteste und in der Schule bekannteste Computeralgebra-Programm. Es entstand 1988 als Nachfolger von muMath(1978) und wurde schnell berühmt, weil es mit unglaublich wenig Programmcode auskam und trotzdem ungeheuer stark in Algebra war. Es passte damals auf eine 360-KB-Diskette und lief auch auf den schwächsten PCs. Heute ist es nur durch die Windows-Oberfläche umfangreicher. passt aber noch auf zwei Disketten. Weil der Codeumfang so gering ist, konnte Derive auch in die Taschenrechner TI-89 und TI-92 eingebaut werden und hat damit eine Revolution des Mathematikunterrichts ausgelöst. Man benötigt keinen Computerraum mehr, um ein Computer-Algebra-System zu starten, jeder Schüler kann es bei sich haben! In den USA ist der TI-92 oder 89 millionenfach für die Schulen beschafft worden, in anderen Ländern sind landesweite Lizenzen beschafft worden, in Deutschland kennt jede Schule, die Computer hat, auch Derive.

Was macht den Erfolg in der Schule aus?

Es ist die **absolute Einfachheit in der Bedienung**. Man gibt bei Derive einfach einen Term ein und der Term erscheint auf dem Schirm. Danach wartet das Programm auf einen Befehl dazu, was mit dem Term gemacht werden soll. Diesen Befehl wählt man mit der Maus aus einem Menü aus oder klickt ein Symbol an. Alle anderen Programme verlangen die Eingabe eines Befehls, des Terms und der Parameter und dieses vergisst der Schüler natürlich, wenn er nicht ständig mit dem Computer arbeitet.

Beispiel: **$y = x^2 - 1$** soll gezeichnet werden.
Derive: **x^2-1** eintippen und Plot-Symbol anklicken.
Maple: **plot(x^2-1, x=-5..5);** eintippen (mit Semikolon!)und ENTER drücken.

Wenn der Schüler bei Maple z.B. drei anstelle von zwei Punkten in **x=-5..5** macht oder das Semikolon vergisst, passiert gar nichts**.**

Es gibt in Derive sehr wenige Befehle, die man eintippen muß. Diese Einfachheit der Bedienung macht es möglich, das Programm auch mit Schülern aus Grundkursen zu nutzen, in denen man keine Zeit hat, die viel umfangreicheren und mächtigeren Sprachen der "großen" Programme Maple und Mathematica zu erlernen.

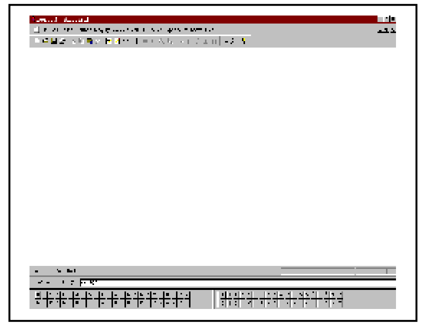
Wie kann man Derive erweitern?

Man kann sich in Derive "höhere" Befehle selbst programmieren. Beispiel:
Sie wollen wiederholt eine "Kurvendiskussion" anwenden, also die Bestimmung von Extrempunkten usw. Sie können das schrittweise jedesmal neu tun, sie können aber die Abfolge der Schritte auch festhalten und als "UTILITY-file" abspeichern. Wenn Sie dann eine Funktion untersuchen wollen, laden Sie ihr UTILITY-file und rufen z.B. auf "KURVDISK(x^3-4x^2-x)". Die Ergebnisse der Kurvendiskussion stehen dann auf dem Schirm. Es gibt ungezählte "Utilities" im Internet.
Auch die anderen CAS-Programme sind natürlich erweiterbar, sie haben jedoch schon viel mehr eingebaut als wir in der Schule je benötigen.

Was kann Derive nicht?

Mit Derive kann man nicht gut Arbeitsblätter schreiben, weil der "Text" auf dem Schirm sich kaum bearbeiten läßt. Man kann auch nicht gut "interaktiven Notebooks" verfassen, wie mit Maple oder Mathematica. Für die Analytische Geometrie bietet Derive wenig Vordefiniertes. Derive zeichnet z.B. nicht automatisch den Schnitt einer Kugel mit einer Ebene im Raum, wie Maple oder Mathematica. Das muß man alles selbst definieren. Aber das sollen die Schüler ja auch lernen!

Der Bildschirm von DERIVE



Bitte starten Sie Derive 5
Wenn Ihnen der DERIVE-Schirm schon
vertraut ist, übergehen Sie diese Übung einfach.

Die oberen Zeilen zeigen Menüs und Symbole für die Befehle.
Wichtig: Ihre Eingabezeile ist die leere dritte Zeile von unten!
Sie geben Ihre Terme immer unten in der Eingabezeile ein.
In das große leere Feld tragen Sie nichts direkt ein.
Sie tippen unten und nach ENTER wird das Eingetippte oben im "Arbeitsblatt" angezeigt!

1. Übung
Geben Sie bitte (a+b)^5 in der Eingabezeile ein und drücken Sie ENTER.
Klicken Sie dann oben auf „Vereinfachen/Multiplizieren/Ausmultiplizieren".
Die Lösung erscheint auf dem Bildschirm.

Die Menüs von DERIVE

Datei	Dateioperationen wie Laden, Speichern usw.	
Bearbeiten	Löschen, Ersetzen usw.	
Einfügen	Eibfügen von Grafiken oder Texten in das Arbeitsblatt	
Schreiben	**Ausdruck**	Eingabe eines Terms, z.B. (a+b)^3
	Vektor	Eingabe der Koordinaten eines Vektors
	Matrix	Eingabe der Elemente einer Matrix
Vereinfachen	**Algebraisch**	a+a+a wird z.B. zu 3a
	Multiplizieren	(a+b)^7 wird ausgerechnet
	Faktorisieren	a^2-b^2 wird zerlegt in (a+b)(a-b)
	Approximieren	Ausgabe als dezimaler Näherungs-wert, Nachkommastellen wählbar
	Variablen-Substitution	z.B. x in (x+5) durch 7 ersetzen
	Teilausdruck-Substitution	Ersetzen von Teiltermen
Lösen	**Ausdruck**	Lösung von z.B. x^2-3x-7=0
	System	Lösung eines Systems von Gleichungen
Analysis	**Grenzwert**	Grenzwertberechnung
	Differenzieren	Bestimmung der Ableitung einer Funktion
	Taylorreihe	Taylorpolynom zu gegebener Funktion
	Integrieren	Integral, bestimmt, unbestimmt, uneigentlich
	Summe	endliche oder unendliche Summemen
	Produkt	endliche oder unendliche Produkte
	Vektor	Erzeugung einer endlichen Folge von Werten
	Tabelle	Wie Vektor, aber mehrdimensional
Definieren	Hier können Variablen und Funktionen definiert und diverse Festle-gungen getroffen werden**,** z.B. n natürliche Zahl.	
Extras	Optionen, Grundeinstellungen aller Art, nicht ändern!	
Fenster	Schließen, Öffnen und Umschalten von Fenstern, Wechseln von PLOT zu ALGEBRA usw.	

Die Symbole unter der Menüzeile erklären sich selbst. Ihre Bedeutung wird in Text-form angezeigt, wenn man den Mauszeiger darauf stehen läßt.

Die Philosophie von DERIVE

1. Jede Zeile des Derive-"Arbeitsblattes", des großen weißen Feldes in der Mitte, enthält entweder einen Term, einen Kommentar oder ein Bild.

> **Terme** sind Ausdrücke mit Buchstaben (Variablen), Zahlen, Funktionen, Gleichungen, Ungleichungen, Vektoren, Matrizen oder logische Ausdrücke. Etwas anderes gibt es nicht.
> **Kommentare** sind Texte, die man in Anführungszeichen (" ") eingegeben hat oder mit der Textbox [AB].

2. Jeder Befehl, den man mit der Maus auswählt, bezieht sich auf den zuletzt markierten Term!
3. Jede Definition bleibt bis zur expliziten Löschung oder Neudefinition gespeichert!

Festlegungen, Variable oder Konstante?

Definitionen setzt man mit „**:=**“. Das Zeichen „**=**“ ist ein Vergleichsoperator.

> Beispiel:
> a) Die Definition „**a:=3+c“** besetzt alle folgenden a´s in allen Termen mit 3, auch dann, wenn man die Definitionszeile vom Bildschirm löscht!
> b) Der Ausdruck „**a=3+c“** wird dagegen als Aufgabe aufgefasst, als Gleichung, die man nach a oder c lösen lassen kann.

Die häufigste Fehlerquelle

Sie haben 10 Zeilen mit Formeln und Berechnungen verfasst, in denen "a" als Variable vorkommt.
In der 11. Zeile belegen Sie a durch „a:=3+c“.
Es geschieht nichts. Nun rufen Sie eine der vorangehenden Zeilen wieder auf und überall wird a durch 3+c ersetzt! Das kann gewollt sein, meist ist es aber nicht erwünscht.
Eine Festlegung gilt immer für das ganze Arbeitsblatt, und zwar solange, bis sie explizit wieder aufgehoben wird!

Aber:
Das Löschen einer Definitionszeile löscht nur die Anzeige der Zeile, nicht die Definition!
Jede Definition bleibt im Hintergrund bestehen, auch wenn sie vom Schirm gelöscht wird!

Sie heben die Definition auf, indem Sie neu definieren a:=a !

Tipp 1:
Belegen Sie nie einzelne Buchstaben mit Werten, weil einzelne Buchstaben meist Variable sind. Definieren Sie stattdessen „a_1:= 3“ o.ä! Noch besser sind „sprechende“ Namen Konstanten Variablen, z.B. „anfang“ anstelle von „a“.

Tipp 2:
Wenn Unvorhergesehenes ausgegeben wird, dann prüfen Sie die Variablenbelegung!
Mit der Eingabe von „a=“ testen Sie, wie „a“ belegt ist.
Kommt „a=a“ als Antwort, ist die Variable a frei.

Die Schreibweise in Derive

Dezimalzahlen	Dezimalzahlen mit Punkt, nicht mit Komma! Also: 3.7 nicht 3,7 ! Das Komma ist ein Trenner.
Brüche/Division	Brüche mit Schrägstrich unter Beachtung der Klammern! Also (a+b)/(c+d).
Potenzen	Potenzen mit "Dach": x^(3t)
Multiplikationspunkt	„3t" heißt „3 mal t", aber „t3" ist eine Variable. Ansonsten ist „ * " der Punktoperator, auch beim Skalarprodukt.
Definitionen	f(x):= 3x + SIN(x) . „ **:=** " definiert. „ = " ist der Vergleichsoperator.
Vektoren	**[1, 2, 3]** ist ein Zeilenvektor, **[1; 2; 3]** ist ein Spaltenvektor (mit Semikolon!). Ich arbeite nur mit Zeilenvektoren, weil die Spalten sonst immer über drei Zeilen gehen.
Matrizen	**[1, 2, 3 ; 4,5,6] ergibt die Matrix** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
Vektoroperationen	Addition: normal mit Pluszeichen. Skalarprodukt: Mit dem Multiplikationspunkt. Kreuzprodukt: Mit dem Befehl „CROSS".
Variablen-Namen	a, b, c und A, B, C usw. sind Standardnamen für Variablen. Ob aber „a2" der Name „a2" ist oder als „a mal 2" interpretiert wird, das hängt von der Einstellung im Menü **Definieren/Eingabeoptionen** ab. Dort sollte man wählen: **Eingabe-Modus: Wort** und **Groß-Kleinschreibung: nicht berücksichtigt**! Dann wird „durchmesser(x)" als Name einer Funktion akzeptiert und nicht von „Durchmesser(x)" unterschieden.
Derive-Namen	Die Namen der wenigen Befehle wie VECTOR oder ITERATE **muss** man groß schreiben, sonst akzeptiert Derive sie nicht. Sinus u.a. Standardfunktionen kann man klein eingeben, Derive schreibt sie auf dem Schirm aber groß. Es ist wohl selbstverständlich, dass man die vordefinierten Funktionen nicht für eigene Funktionsnamen verwenden darf. Deshalb: **Alle vordefinierten Funktionen und Befehle von Derive groß schreiben!**
Differentialoperator, Integral usw.	Wird alles über Menüs aufgerufen. Braucht man nicht zu schreiben. Kann man aber.

Grundmuster der Bedienung

Wie berechne ich Zahlen?

1. Ausdruck eingeben, in der Eingabezeile. z.b. (3+ê)^5
2. Berechnen lassen:

Neben der Eingabezeile unten finden Sie links fünf Symbole: $\boxed{\vee}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\approx}$usw.
Der Haken $\boxed{\vee}$ist identisch mit RETURN, d.h. Eingabe des Terms in das Arbeitsblatt.
Das Gleichheitszeichen $\boxed{=}$ bedeutet "Vereinfachen", ausrechnen. Aus 3+5 wird 8.
Das Ungefährzeichen $\boxed{\approx}$ bedeutet Approximieren, aus √2 wird 1,414 .
Die anderen Zeichen sind Kombinationen. Probieren Sie alles aus!

!Achtung! **Die Zeichen** $\boxed{=}$und $\boxed{\approx}$**gibt es zweimal!** Einmal oben und einmal unten!
Die unteren Zeichen beziehen sich auf den Term in der Eingabezeile,
die oberen Symbole beziehen sich auf den markierten Term im Arbeitsblatt!.

Wie forme ich Terme um?

1. Ausdruck eingeben, in der Eingabezeile. z.b. (a+b+c)^3
2. Umformen lassen:

Klicken Sie oben auf **„Vereinfachen/Multiplizieren/Ausmultiplizieren“.**
Die Lösung erscheint auf dem Bildschirm.

Wie löscht man etwas?

In der Eingabezeile: Mit TAB alles markieren, mit BACKSPACE löschen, das ist die Taste $\boxed{\leftarrow}$.
Im Arbeitsblatt: Anklicken und Taste $\boxed{\text{Entf}}$drücken.

Wie bearbeite ich einen Term?

- Klicken Sie mit der **rechten Maustaste** auf einen Term. Es öffnet sich ein Bearbeitungsmenü.

oder

- Markieren Sie einen Term und **drücken Sie F3.**

Das holt den markierten Term in die Eingabezeile zum Bearbeiten oder Ändern.

Elementare Algebra mit Derive

Rechnen mit Zahlen, exakt oder näherungsweise?

Geben Sie bitte den folgenden Term ein und klicken Sie auf $\boxed{=}$ für Vereinfachen:
5/7 + 3/9 - 0.7 Ergebnis: 73/210
Derive rechnet von sich aus immer mit Brüchen, d.h. exakt.
Erst mit $\boxed{\approx}$ für Approximieren wird eine Kommazahl angezeigt.

Lösung von Gleichungen mit Zahlen

Geben Sie sin(x)= 0.7 ein, drücken Sie RETURN und dann klicken Sie dann auf
Lösen - Ausdruck - **Algebraisch** - Lösen
Lösen - Ausdruck - **Numerisch** - Lösen
Lösen - Ausdruck - **Beides** - Lösen

Wenn Sie zum Schluss "O.k." anklicken, an Stelle von "Lösen", wird nur die Aufgabe in das Arbeitsblatt geschrieben!

Die Exaktheit bei "Algebraisch" frustriert Schüler manchmal, weil sie ein abgerundetes Ergebnis erwarten. DERIVE gibt die Lösung i.A. auch mit komplexen Lösungen, wenn Sie vorher im LÖSE-Menü nicht ausdrücklich "Reell" gewählt haben!

Wurzeln

Der indirekte Beweis für die Irrationaltät der Wurzel(2) überzeugt die Schüler im allgemeinen nicht. Die Anzeige von 100 Stellen wirkt da schon besser:
- Geben Sie ein: SQRT(2). Dann: Vereinfachen/Approximieren/Stellenzahl=100 .
- Dass die Wurzel aus 2 auch bei 100 Stellen noch ein Bruch ist, erfahren Sie, wenn Sie jetzt **Vereinfachen-Algebraisch** anklicken!
- Probieren Sie bitte andere Wurzeln aus! Die 7. Wurzel aus 2 müssen Sie mit **2^(1/7)** eingeben!

Die Genauigkeit ist auf 10 Stellen voreingestellt. Sie können das verändern, indem Sie bei **Definieren\Ausgabeoptionen** eine andere Zahl eintragen.

Potenz und Fakultät

Grenzen der Berechnung sind nur durch den Arbeitsspeicher gegeben.
- Lassen Sie z.B. 5^1000 berechnen!

(Mit **Vereinfachen\Approximieren** bekommen Sie Darstellung als 10-er-Potenz.)
- Berechnen Sie 100**!** (100-Fakultät). (Fakultät wird einfach mit "!" geschrieben.)

Primfaktoren

- Wählen Sie nun Vereinfachen-Faktorisieren-Rational. 100! wird in Primfaktoren zerlegt.
- Probieren Sie danach Approximieren. 100! wird als 10-er-Potenz angezeigt.

Vereinfachen von Zahl-Ausdrücken

Geben Sie eine komplizierte Wurzel ein und wählen Sie danach **Vereinfachen-Algebraisch**.
Beispiel:
- SQRT(5+SQRT(24))+ SQRT(5-SQRT(24)) ergibt: 2*SQRT(3)

Rechnen im Komplexen

Die imaginäre Einheit î schreiben Sie mit mit Ctrl-i. Sie können Sie aber auch rechts unten anklicken.
Achtung, Fehlerquelle: „i“ ist eine Variable, „î“ ist die imaginäre Einheit.

- Eingabe:(1+2î)^2/(-2-3î)*(3-4î)^2 und [Vereinfachen].
  RE(z) gibt den Realteil,
  IM(z) gibt den Imaginärteil zurück.

Rechnen mit Unendlich

(Das Zeichen ∞ wird mit Ctrl-0 geschrieben oder rechts unten ausgewählt.)
- Versuchen Sie: ∞ + ∞ + 5 !
- Probieren Sie auch: ∞ - ∞ + 5 !

Das letzte Ergebnis ist ein Fragezeichen, weil. ∞ minus ∞ nicht erlaubt ist!

Vordefinierte Funktionen

Erproben Sie bitte auf eigene Faust Berechnungen.
Zur Verfügung stehen rund 300 Funktionen. Hier die wichtigsten für die Schule:
SQRT, EXP, LN, LOG, LOG(z,w)(= Logarithmus von z zur Basis w)
SIN(z*deg) (= Sinus von z **Grad**), SIN(z) (= Sinus von z **Rad**)
COS, TAN, COT, ATAN, ASIN, ACOS,
ABS(x) Absolutwert oder Betrag von x
SIGN(x), d.h. Signum oder Vorzeichen von x
MAX(x, y, ...) Maximum der Argumente, MIN(x, y, ...)
MOD(m, n) - m modulo n (nicht negativer Rest von m/n)
Round, Floor, Ceiling, Chi usw.
Die Liste aller eingebauten Funktionen finden Sie in der Hilfe unter
"**Built-in Functions and Constants**".

Umformungen von Termen

Faktorisieren von Termen

Geben Sie z.B. die folgenden Terme ein und dann [Vereinfachen]-[Faktorisieren]:
- (x^4-1) Vereinfachen-Faktorisieren-Rational-Faktorisieren ergibt: $(x+1)(x-1)(x^2+1)$.
- 6ax+9bx+4ay+6by Vereinfachen-Faktorisieren-Rational ergibt: (2a+3b)(3x+2y)

Es gibt Faktorisieren-Trivial, Quadratfrei, Rational, Radikal und Komplex.
- Trivial versucht eine Bruchdarstellung,
- Radikal zerlegt in Wurzeln usw.,
- Rational ergibt im Unterricht meist das Gewünschte.

Sie benötigen als Aufgabe für die Schüler eine gebrochen-rationale Funktion mit einer Parabel als Asymptote?
(x-1)/((x+1)*(x-2))+ x^2 eingeben und Vereinfachen-Faktorisieren-Rational.

Wenn Sie jetzt noch den Term (x+1)(x-2) im Nenner markieren und Vereinfachen-Multiplizieren aufrufen, haben Sie die Aufgabe fertig.

Ausmultiplizieren von Termen

Sie brauchen für den Unterricht eine Funktion 4. Grades mit ganzzahligen Nullstellen?
Geben Sie den folgenden Term ein und wählen Sie dann **Vereinfachen-Multiplizieren**!
- (x+1)(x+2)(x-1)(x-3) . Multiplizieren rechnet also aus.

Polynomdivision, gebrochen-rationale Funktionen

Welche Asymptote hat die folgende Funktion? Bitte eingeben und Multiplizieren wählen.
- (x^4 - 1)/(x^2 - x - 6)
Die Asymptote erkennen Sie sofort am ganz-rationalen Teil.

- Wenden Sie jetzt Faktorisieren auf den gleichen Term an!
Sie erhalten sofort die Übersicht über die Nullstellen anhand der Linearfaktoren.

Reziproke Terme

Sie erstellen den reziproken Term eines Terms indem Sie diesen mit F3 in die Eingabezeile holen, den Term in Klammern setzen und mit (-1) potenzieren. Danach Vereinfachen-Algebraisch.
Wenden Sie das bitte auf den Term x^2-3 an.

Partialbruchzerlegung

Mit **Vereinfachen-Multiplizieren-Radikal** erreichen Sie bei Brüchen eine Partialbruchzerlegung!
- 1/(x^2 - 3) eingeben und Vereinfachen-Multiplizieren-Radikal-Multiplizieren!

Das Lösen von Gleichungen

Einfache Gleichungen

Sie lösen eine Gleichung durch Eingabe derselben und Wahl von **Lösen-Ausdruck**!
Dort können Sie wählen zwischen Algebraisch, Numerisch oder Beides.

- 2x^2 - 2x - 5 = 3x eingeben.
Dann **Lösen-Ausdruck-Algebraisch-Lösen** oder **Lösen-Ausdruck-Numerisch-Lösen** wählen.
Vorher den Term jeweils markieren!

Gleichungen mit mehreren Variablen

Lösen Sie bitte die Gleichung 2xy+x-(y+1)=0 nach x und nach y auf!
(Sie müssen dazu bei Lösen-Ausdruck-Algebraisch die Variable auswählen, nach der gelöst werden soll.)

Unendlich viele Lösungen

Lassen Sie bitte **sin(x)=1** lösen.
Die Lösung ergibt nur zwei Werte. Hier muß der Schüler selbst ergänzen in welchen Intervallen sich die Lösungen wiederholen.

Lösungsmenge ist IR

Probieren Sie bitte noch: 2x = x + x .
Lösen-Algebraisch ergibt: true, d.h. x ist ein beliebiger Wert.
Lösen-Numerisch ergibt aber false! Warum?

Gleichungssysteme

1. Geben Sie zwei Gleichungen ein, wie in #1 und #2.
2. Geben Sie als dritte Zeile in eckigen Klammern ein: **[#1 ; #2]** mit Semikolon! Das ergibt #3.
3. Wählen Sie nun für #3: **Lösen/Ausdruck** , nicht Lösen/**System**! Warum nicht?

Bei **Lösen/System** verlangt Derive die Eingabe eines Systems! Sie müssten also neu tippen.

#1: $3\cdot x + 4\cdot y = 7$

#2: $2\cdot x - 5\cdot y = -8$

#3: $\left[\begin{array}{c} 3\cdot x + 4\cdot y = 7 \\ 2\cdot x - 5\cdot y = -8 \end{array}\right]$

#4: $\mathrm{SOLVE}\left(\left[\begin{array}{c} 3\cdot x + 4\cdot y = 7 \\ 2\cdot x - 5\cdot y = -8 \end{array}\right], [x, y], \mathrm{Real}\right)$

#5: $\left[x = \frac{3}{23} \wedge y = \frac{38}{23}\right]$

Was löst Derive nicht?

Derive kann nur exakt lösen, was exakt lösbar ist!
Exakt lösbar ist, was durch Äquivalenzumformung und Umkehroperationen lösbar ist.
Probieren Sie x^2 = 3^x .
Lösen-Algebraisch ergibt nur eine Umformung. Lösen-Numerisch ergibt aber einen Näherungswert! Warum?

Das Plotten von Graphen

2D-Plot

Geben Sie z.B. ein: **f(x):=x^2-1** und klicken Sie auf das Symbol für das 2D-Plot-Fenster **rechts oben**.
Klicken Sie in dem sich öffnenden Plot-Fenster noch einmal auf das 2D-Plot-Symbol (es steht jetzt links), dann erscheint die Zeichnung.
Derive zeichnet nicht sofort, weil das Programm erwartet, dass Sie vielleicht unter "Einstellungen“ oder „Extras" noch etwas festlegen wollen. Experimentieren Sie damit!
Mit dem Symbol "Algebra-Fenster" ganz rechts kommen Sie zurück zum Arbeitsblatt.

Oft befriedigt der erste Plot nicht, weil der Zecihenbereich für die Funktion nicht richtig eingestellt ist. Dann müssen sie angeben, von wo bis wo geplottet werden soll usw. Siehe unten.

3D-Plot

Mit den modernen CAS kommt man endlich dazu, auch 3D-Objekte zu untersuchen.
Geben Sie z.B. ein: **g(x,y):=x^2+y^2** und klicken Sie auf das Symbol für das 3D-Plot-Fenster rechts oben.
Klicken Sie im Plot-Fesnter noch einmal auf das 3D-Plot-Symbol. Dann erscheint die Zeichnung.
Mit den Pfeilen können Sie die Zeichnung Drehen. Mit dem Spiralsymbol erzeugen Sie eine Animation. Mit dem Symbol "**Algebra-Fenster**" ganz rechts kommen Sie zurück.

Beispiele:
Eine Kugel im Ursprung:
abs([x,y,z])=3 eingeben. Dann: **Lösen-Ausdruck-z-Lösen**. Dann **3D-Plot**

Eine Wendeltreppe:
[u*sin(t), u*cos(t),t] eingeben im Algebra-Fenster und 3D-Plot.
Es gibt ungezählte weitere Beispiele auf den Derive-Disketten und im Internet.

Plotten einer Funktionenschar

Alles, was in DERIVE "mehrfach" berechnet werden soll, also eine Folge von Zahlen oder Funktionen, muß mit dem Befehl VECTOR erzeugt werden. Ein VECTOR ist eine „Liste“ von Objekten. Ein handelsüblicher Vektor ist auch eine Liste.

Zunächst muß ein Vektor von Funktionen erzeugt werden, sonst plottet Derive keine Scharen.

`Eingabe:` **`f(x,a):=ax^2-3x-1`** `und Return`
`Eingabe:` **`VECTOR(f(x,a),a,-5,5,1)`** `und Return`
Bedeutung: Generiere Liste von Objekten f(x,a), wobei a läuft von -5 bis 5 mit der Schrittweite 1.

Die Vector-Zeile anklicken und **Vereinfachen - Multiplizieren** wählen. Es wird eine Liste von Funktionen generiert. Die Liste bitte markieren und dann auf das Symbol **"2D-Plot"** klicken. Das Graphikfenster öffnet sich. Im Graphikfenster wieder auf das Symbol **"2d-Plot"** klicken.

Das Plotten von impliziten Funktionen bzw. Relationen

Sie brauchen nur eine Gleichung mit x und y einzugeben und Derive weiß, was gemeint ist.

`Also:` **`x^2+y^2=4`** `eingeben und danach` $\boxed{\texttt{2d-Plot}}$.

Der Kreis erscheint mit Sicherheit als Ellipse, wenn Sie das Fenster nicht mit FENSTER-Tile Vertically geteilt haben.

Probieren Sie auch:

Parabel: $y^2=2px$; Ellipse: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; Hyperbel: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

Relationenscharen

Mit der folgenden Schar erzeugen Sie aus einem Kreis Ellipsen:

- `VECTOR ( t*x^2+y^2=4 , t , 1 , 10 , 0.1) eingeben,`
- `dann Vereinfachen-Algebraisch und` $\boxed{\texttt{Plot}}$.

Graphik-Einstellungen

Das größte Problem beim Plotten ist die Wahl des richtigen Ausschnitts.

Fenster teilen

DERIVE unterscheidet grundsätzlich zwischen Algebra-Fenster und Graphik-Fenster. Sie bekommen die Graphik zwar "in den Text" mit EINFÜGEN, Sie können sie aber dort nicht bearbeiten. Damit man nicht immer zwischen Algebra-Fenster und Graphik-Fenster wechseln muß, bietet es sich an, das Fenster zu teilen.

- Wählen Sie: Fenster - Vertikal anordnen im Plotfenster.

Die Teilung heben Sie wieder auf, indem Sie die in Wndows üblichen Schließ- und Vergrößerungsbuttons in den Fensterzeilen oben rechts benutzen.

Maßstab im Fenster

Derive stellt von sich aus den Graphen <u>nicht</u> im Verhältnis 1:1 dar, wie es der Schüler vom Papier her kennt, sondern wählt beim ersten Aufruf des Plot-Fensters immer für die beiden Achsen jeweils das Intervall, welches bei der letzten Benutzung des Programms eingestellt war,

meist [-5; 5] . Da das Fenster selten quadratisch ist, ist der Graph immer verzerrt.

Das beste Ergebnis erreichen Sie mit Fenster - Vertikal anordnen .

Automatischer Maßstab

Hat man jedoch unter EXTRAS auf AUTOMATISCHE Maßstabswahl gestellt, dann teilt Derive die y-Achse so ein, dass alle y-Werte, die zum x-Intervall [-4, 4] gehören, zu sehen sind. Das ist selten gut.

Bildausschnitt

Mit EINSTELLEN und Bildausschnitt kann man die Achsenabschnitte neu bewerten. Ist die Horizontale z.B. bei Scale=1 von -5 bis 5 eingeteilt und man wählt Scale=2, dann geht die Achse jetzt von -10 bis 10.

Zeichenbereich

Mit EINSTELLEN und Zeichenbereich kann man für jede Achse das Intervall per Hand bestimmen. Wenn man das Fenster vertikal geteilt hat, ergibt sich eine Eins-zu-eins-Einstellung, wenn man x-und y-Achse gleich einteilt, z.B. jeweils von -4 bis -4 !

Spurmodus

Nach EXTRAS und Spurmodus erscheint ein kleines Quadrat auf dem Graphen und man kann mit der Maus oder den Cursortasten den Graphen abfahren. Unten erscheinen die Werte.

Folgemodus

Stellt man jedoch FOLGEmodus ein, dann zieht das Koordinatensystem nach, wenn man die Kurve über den Rand des Fensters hinaus abfahren will.

Zurück zur Normaldarstellung

Wenn alles verrutscht ist:

a) Wählen Sie den Button URSPRUNG als Mittelpunkt. Das zentriert, aber in der aktuellen Skalierung.

b) Wenn Sie ganz zum "Ursprung" zurück wollen, dann ist es am einfachsten, das Plot-Fenster mit den FENSTER-Buttons zu schließen und ein neues aufzuziehen. Dann Einstellen-Zeichenbereich-Rücksetzen.

Vergrößerung, Verkleinerung

a) Sie können mit den zugehörigen Buttons eine Grobeinstellung vornehmen. Mit jedem Klick werden die Achsenintervalle verdoppelt bzw. halbiert.
b) Mit dem Button ZEICHENBEREICH festlegen durch RECHTECK können Sie Ausschnitte auswählen: Erst den Button anklicken, dann Mausklick neben den Graphen, gedrückt halten, ziehen, loslassen, OK anklicken.
c) Am Genauesten geht es mit der Eingabe von Hand nach Wahl von Einstellen-Zeichenbereich.

Zweite Funktion ins gleiche Fenster

Wenn Sie eine zweite Funktion ins gleiche Fenster zeichnen lassen wollen, dann müssen Sie ins Algebrafenster wechseln, die Funktion anklicken und wieder Plot aufrufen. Zurück ins Algebra-Fenster kommen Sie, wenn Sie im Graphikfenster den Button für Algebra-Fenster anklicken.

Drucken einer Graphik

Klicken Sie das Druckersymbol an, dann wird die Graphik formatfüllend gedruckt.
Mit Datei - Seiteneinstellung können Sie die Seite einrichten.

Übernahme einer Graphik in das Arbeitsblatt

Aktivieren Sie das Plot-Fenster. Wählen Sie Datei-Einbetten. Wichtig für Klausuren!

Speichern einer Graphik als Datei

Aktivieren Sie das Plot-Fenster. Wählen Sie Datei-Exportieren.

Übernahme einer Graphik in eine Textverarbeitung

Nach Bearbeiten / Markieren und Kopieren erscheint ein Kreuz im Plotfenster. Bestimmen Sie durch Ziehen mit der Maus einen Ausschnitt. Nach Loslassen der Taste steht der Ausschnitt in der Zwischenablage von WINDOWS und kann z.B. in ein Word-Dokument mit BEARBEITEN-EINFÜGEN einsetzt werden.

Analysis mit Derive

Differentialrechnung

Differenzieren

Geben Sie z.B. ein: x^2 *(SIN(x)/LN(x))
Danach wählen Sie bitte **Analysis - Differenzieren - x - 1 - Vereinfachen.**
Erproben Sie bitte das Ableiten an selbst gewählten Funktionen. Sie können auch gleich die 3. oder 10. Ableitung berechnen lassen.

Das Differenzieren von Kurvenscharen

Differenzieren Sie z.B. die folgende Funktionenschar nach x und nach t: (**x - t)*SIN(x + t)** .
Lassen Sie sich die Schar als 3D-Plot anzeigen.

Nicht überall differenzierbare Funktionen

Auch nicht vollständig differenzierbare Funktionen werden differenziert:
Versuchen Sie es mit: **ABS(x^2 - 4)** .
Im Ergebnis werden Sie die Signum-Funktion finden.

Funktionen nach Vorgaben bestimmen

Eine Parabel geht durch die Punkte (1|6) und (2|17) und hat bei x=3 eine Tangente mit der Steigung 20. Wie lautet die Gleichung der Parabel? Wir lösen das Problem mit Derive!

```
1. f(x):=ax^2 + bx + c eintippen. [Return].
2. Analysis - Differenzieren - Vereinfachen anklicken.
  2ax+b müßte in Zeile 3 stehen.
3. f1(x):=#3 eingeben(mit Doppelpunkt!)
4. [f(1)=6 , f(2)=17 , f1(3)=20] eingeben in eckigen Klammern!
5. Nun Lösen-Ausdruck-abc befehlen. Ergebnis: [a=3, b=2, c=1]
```

Integralrechnung

Stammfunktion und bestimmtes Integral

Integrieren Sie bitte eine Funktion Ihrer Wahl mit Analysis\Integrieren.
Wenn Sie Untere - und Oberer Grenze konkret angeben und dann Vereinfachen, erhalten Sie ein bestimmtes Integral, sonst eine Stammfunktion. Wenn nicht, dann gibt es keine oder DERIVE kennt keine!

Nicht integrierbare Funktionen

Versuchen Sie jetzt sin(1/x) zu integrieren.
Sie werden bemerken, dass weder Multiplizieren, noch Vereinfachen etwas bewirken. Hier ist die Gelegenheit, den Schülern zu erläutern, dass durchaus nicht jede Funktion integrierbar ist, genauer, dass es nicht immer eine Stammfunktion gibt.
Wenn Sie Grenzen angeben, also ein bestimmtes Integral berechnen, dann gibt es natürlich eine Lösung mit „Approximieren“.

Uneigentliche Integrale

Sie können auch uneigentliche Integrale berechnen. Sie müssen einfach als Obergrenze + ∞ oder -∞ eingeben.
Versuchen Sie es mit dem Integral der Funktion **1/x^2 von 1 bis ∞ !**

Grenzwerte

„lim-Grenzwert" aus dem Analysis-Menü gibt den Grenzwert einer Funktion oder Folge an. Sie definieren zunächst eine Funktion und wählen dann Analysis - Grenzwert. Das Weitere ist selbsterklärend.

Folgen

Folgen sind Funktionen mit n gegen ∞ als Variable.
Geben Sie z.B. (1+(1/n))^n ein und wählen Sie Analysis/Grenzwert.

Taylorreihen

"Taylorreihe" im Menü Analysis gibt zu fast jeder Funktion die Taylor-Reihen-Entwicklung an. Sie müssen nur die Nummer des Reihengliedes angeben, welches Sie haben wollen.

Geben Sie z.B. sin(x) ein, markieren Sie den Term und rufen Sie
Analysis - Taylorreihe
mehrfach auf für Order 1, 2, 3 usw.

Dann kann man sin(x) und die Polynome einzeln plotten lassen und der Schüler lernt, wie der Taschenrechner sin(x) berechnet.

Programmieren mit Derive

Es gibt Tausende von Programmen in Derive, etliche werden gleich mitgeliefert, im Internet gibt es Derive-Groups, es gibt Derive-Tagungen, einen User-Club usw. Gleichwohl kommt das Programmieren in der Schule selten vor, weil es ziemlich schwer und zeitaufwendig ist und deshalb für den Unterricht wenig geeignet ist. Es kann aber lehrreich sein, ein vom Lehrer erzeugtes Programm zu studieren.

Das Problem besteht darin, dass ein Derive-Programm **nicht** aus einer Folge von Anweisungen besteht, wie man es von Pascal oder einer anderen imperativen Sprache gewohnt ist, sondern aus einer einzigen Funktion, denn Derive kennt nur Funktionen. Das Prinzip ist das der verketteten Funktion: **K(x):= f(g (h(j(x)))) .**
Man definiert j(x) in einer Zeile. In der nächsten Zeile definiert man h(x), wobei j(x) irgendwie verwendet wird. Dann g(x). USW. Der Aufruf von K(x) arbeitet dann alles suzessive ab.
Man startet das "Programm", indem man die Funktion K(x) mit *Vereinfachen-ALGEBRAISCH* zur Ausgabe von Werten bewegt.

Im Programmverzeichnis von Derive findet man ein Unterverzeichnis MATH und darin viele Dateien mit Namen wie ALGEBRA.mth, ANALYSIS.mth, BESSELL.mth. usw. Diese enthalten ungezählte, schon vordefinierte Spezialfunktionen, die man aber in der Schule kaum einsetzt, weil man dann deren Aufbau erklären müßte. Hinzu kommt, dass man beim Programmieren zwecks Auswahl von Werten, Derive-Befehle wie SELECT, APPEND, DENOMINATOR usw. benötigt, die man sonst im Unterricht eigentlich unterschlägt.

Braucht man Programme?

Für die Analysis habe ich bisher keine Programme gebraucht, aber für die Anylytische Geometrie. In AnaGeo gibt es viele lästige Kleinaufgaben, die DERIVE nicht automatisch erledigt. Z.B: „Zeichne eine Gerade mit Spurpunkten“ oder „Zeichne eine Ebene mit Anfangsvektor und Einheitsquadrat des Erzeugendensystems“. Sölche Dinge habe ich automatisiert und die Schüler benutzen lassen, selbst im Abitur.

Beispiele für Programme:

Kurvendiskussion automatisch

- Laden Sie bitte in Derive mit *Datei -Öffnen* die Datei **kurvdisk.mth** , wenn vorhanden!
- Tippen Sie z.B. **DISKUTIERE(x^3-2x+3)** ein wählen Sie *VEREINFACHEN-ALGEBRAISCH*.
Die Kurvendiskussion ist fertig, die Wertestehen auf dem Schirm.

Sortieren

Es kommt immer wieder vor, dass eine Liste von Werten zwecks weiterer Verarbeitung oder wegen besserer Übersicht geordnet werden soll. Dazu dient das folgende, rekursiv definierte Programm.
(SAK soll „ Sort And Kill“ heißen.)

SAK(w,v):=IF(DIMENSION(v)<=0,w,SAK(APPEND(w,[MIN(v)]),SELECT(x>MIN(v),x,v)))
ORDNE(u):=SAK([],u)

Aufruf z.B. mit ORDNE([3,-1,2,2,3,1])

ORDNE startet SAK mit einem leerem Vektor und dem Vektor u. SAK macht u zu v. Ist v leer (Dimension<=0), dann wird w zurückgegeben. Anderenfalls wird in das anfangs leere w das Minimum der noch in v verbliebenen Elemente angehängt. Das wird wiederholt, bis v leer ist.
Für detaillierte Erklärungen laden Sie bitte die Datei "ORDNEN.MTH", wenn vorhanden.

Analytische Geometrie mit Derive

In der Analytischen Geometrie geht es um Punkte, Vektoren, Ebenen, Geraden, Kreise, Kugeln, usw. Derive hat keine eingebauten Befehle zum Zeichnen von solchen Objekten, weil das 3D-Plot-Fenster nur explizite Funktionen vom Typ z = f(x, y) akzeptiert. Aber Geraden, Ebenen, Kreise können problemlos dargestellt werden.. Rechnen kann Derive mit Vektoren und Matrizen ohnehin. Die Zusatzdatei "VEKTOR.MTH" enthält erweiterte Funktionen zur Berechnung von Vektoren und Matrizen.

Wie kann man mit Derive geometrische Objekte zeichnen?

Dazu gibt es nur eine einzige Einrichtung in Derive, auf der alles beruht:
Derive zeichnet einzelne Punkte und verbindet sie auf Wunsch durch Linien!

Man muss im Menü **Extras/Anzeige/Punkte/Verbinden** einstellen, damit Derive die Punkte nacheinander verbindet, sonst zeichnet Derive nur einzelne Punkte.

Vektoren

```
v2d:=[[0,0] , [2,1] ]
v3d:=[[0,0,0] , [3,2,1]]
```

Strecken

```
s2d:=[[2,1] , [1,2]]
s3d:=[[3,2,1] , [2,1,2]]
```

Dreiecke

```
dreieck2d:=[[0,0] , [2,1] , [1,2] , [0,0]]
dreieck3d:=[[0,0,0] , [3,2,1] , [2,1,2] , [0,0,0]]
```

Kreise

kreis2d:=VECTOR([COS(t) , SIN(t)] , t , 0 , 2π , π/36)
kreis3d:=VECTOR([3 , 2+COS(t), 2+SIN(t)] , t , 0 , 2π , π/36)

Kugeln

$$\mathrm{Kugelpunkt}(\varphi, \lambda) := [\mathrm{COS}(\lambda)\cdot\mathrm{COS}(\varphi), \mathrm{SIN}(\lambda)\cdot\mathrm{COS}(\varphi), \mathrm{SIN}(\varphi)]$$

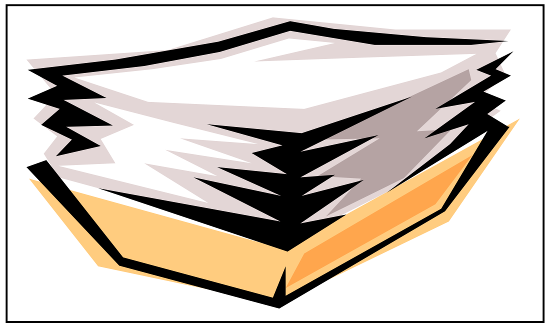
$$\mathrm{LKreis}(\lambda) := \mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{Kugelpunkt}(\varphi, \lambda), \varphi, 0, 2\cdot\pi, \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\mathrm{VieleLKreise} := \mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{LKreis}(\lambda), \lambda, 0, 2\cdot\pi, \frac{\pi}{12}\right)$$

Auf ähnliche Weise definiert man Ellipsen, Spiralen, Wendel, Parabeln in schrägen Ebenen, Kurven auf Kugeln usw. Wer sich dazu Beispiele wünscht, der spreche mich an.

Unterrichtsbeispiele

Wir falten Papier!



Wir nehmen ein Blatt Papier und falten es zusammen.
Das Doppelblatt falten wir wieder zusammen. Usw.
Wir nehmen an, dass wir das Blatt beliebig oft falten könnten.

Frage 1: Wie dick ist das zusammengefaltete Paket nach 6 Faltungen?
Probieren Sie es aus und schätzen Sie die Dicke, bevor wir rechnen!

Frage 2: Nach wieviel Faltungen reicht der Stapel bis zur Zimmerdecke?
Schätzen Sie zunächst einen Wert!

Frage 3: Wie oft muß ich falten, um bis zum Mond zu kommen?
Was schätzen Sie?

Lösung zu Frage 1:

Zunächst müssen wir wissen, wie dick das Papier überhaupt ist!
Wir messen: Ein Paket Kopierpapier mit 500 Blatt (80g/qm) ist 5 cm dick.
Wir rechnen im Kopf, ohne Computer:
5cm = 0.5 dm = 0.05 m

Jetzt teilen wir 0.05 m durch 500 Blatt. Wer es im Kopf kann, der soll es tun.
Zur Sicherheit nehmen wir den Computer und starten **DERIVE.**

Geben Sie ein: **0.05 m/500**

Danach **Approximieren** anklicken! (Das ist das Icon **≈**.)
Das Ergebnis müsste lauten:
0.0001 m
D.h., dass das normale Papier ein Zehntel Millimeter dick ist.

Wir rechnen im Kopf:
Vor der ersten Faltung **0.0001 m** Dicke.
Nach der ersten Faltung muss das Paket 2*0.0001= **0.0002 m** dick sein.
Nach der zweiten Faltunge ist es 2*0.0002= **0.0004 m** dick**.**
Nach der dritten Faltung ist es 2*0.0004= **0.0008 m** dick. Usw.
Wer bis sechs Faltungen weiter rechnen will, der kann das tun.

Wir können aber auch DERIVE für uns rechnen lassen:

Hier geht es offensichtlich darum, dass der zweite Wert einer Zahlenfolge aus dem ersten Wert berechnet wird. Der dritte Wert wird aber aus dem zweiten Wert berechnet. USW. Diesen Prozess nennt man in der Mathematik **ITERATION.**

ITERATE und ITERATES.

DERIVE kennt dazu zwei Befehle: ITERATE und ITERATE**S**.
ITERATE**S** bedeutet, dass alle Werte einer Iterationsfolge ausgegeben werden.
ITERATE bedeutet, dass nur das Endergebnis einer Iteration ausgegeben wird.

Wir wenden das auf unser Problem an.
Geben Sie in DERIVE ein: **ITERATES(2*x, x, 0.0001, 6)**
Das bedeutet im Einzelnen:
Verdoppele jeden vorhergehenden Wert **(2*x)**, die Variable, die iteriert wird ist (**x**)**,** die Iteration beginnt mit **(0.0001)** und **(6)** ist die Anzahl der Iterationen.
Klicken Sie nun an: $\boxed{\approx}$ **(Approximieren)** Ergebnis: Eine Liste von sechs Zahlen.
Wir probieren jetzt ITERATE, **ohne S** !
Geben Sie zum Vergleich ein: **ITERATE(2*x, x, 0.0001, 6)**
Und wieder anklicken: **Approximieren**

Ergebniskontrolle: Nach 6 Faltungen ist der Stapel 0.0064 m dick, also 6,4 mm!

Lösung zu Frage 2: Wieviel Faltungen bis zur Zimmerdecke?

Damit wir weitere Faltungen leichter ausgeben lassen können, definieren wir uns eine Funktion:
Geben Sie in DERIVE ein: **IT(n):=ITERATE(2*x, x, 0.0001, n)**
Probieren Sie **IT(10), IT(20)** usw . aus! (Eingeben und Approximieren...)

IT(20) ergab schon mehr als 100 m Dicke. Um das Probieren abzukürzen, lassen wir uns eine nu-merierte Liste der Werte ausgeben.
Geben Sie ein: **VEKTOR([n , IT(n)] , n, 1, 20)**
Danach wieder Approximieren ...
Ergebniskontrolle: Aus der Liste lesen wir ab, dass der Stapel nach 15 Faltungen auf 3,27 m angewachsen ist, also bis zur Zimmerdecke reicht!

Lösung zur Frage 3: Wann reicht der Stapel bis zum Mond?
Dazu müssen wir natürlich wissen, wie weit der Mond von der Erde entfernt ist!
Wir erinnern uns:
Der Mond ist im Mittel etwa 30 Erddurchmesser entfernt und die Erde hat den Durchmesser 13.000 km. Und 30 *13.000 km sind 390.000 km. Wir brauchen den Wert aber in Meter, weil unsere Tabelle m ausgibt.
Wir rechnen mit Derive: **13000*1000m*30**
und erhalten als Ergebnis: 390000000 m
Klicken Sie auf Approximieren: **3.9 * 10^8 m**
Wir schauen in der Tabelle nach, die zu sehen ist. 20 Faltungen reichen nicht!
Geben Sie ein: **VEKTOR([n , IT(n)] , n, 1, 50)**
Klicken Sie auf Approximieren. Suchen Sie nach dem Wert der größer als **3.9 * 10^8 m ist.**
Ergebniskontrolle: Wir lesen ab, dass der Stapel nach 42 Faltungen schon weit über den Mond hinaus reicht.
Anschlußfrage: Kann man das Wachsen irgendwie veranschaulichen?
- Markieren Sie die gerade erzeugte Tabelle durch anklicken.
- Klicken Sie auf das Plot-2D-Symbol.
- Klicken Sie auf "Set" und dann auf "Plotrange".

Geben Sie bei "Horizontal" ein: **-1 ; 29; 30** .Geben Sie bei "Vertical" ein: **-5; 95; 20**.
Abschluß mit OK.
Klicken Sie dann auf den Plot-Button im PlotFenster. Welche Funktion ist das?

Überraschungen beim Integrieren

Floor und Frac

Die bekannten Funktionen aus dem Unterricht bieten beim Integrieren mit Derive kaum Lernanregung, weil alles glatt geht. Man probiere aber das Folgende:

Floor(x) zeichnen lassen
Floor ist die **Ganzzahlfunktion.** Sie ist definiert durch floor(x)=n, solange n <= x < n.

Wir definieren:
Frac(x):= x - floor(x) . Das ist eine "Sägezahn"-Funktion.
Frac(x) eingeben und zeichnen lassen!

Wir leiten FRAC ab und erhalten 1. Wir integrieren 1 und erhalten x.
Ist x etwa die gleiche Stammfunktion wie Frac(x)? Natürlich nicht!
Berechnen die Funktionen wenigstens das gleiche Integral?

Probe durch Integration von x und Frac(x) von -3 bis 3 fällt negativ aus.
Erkenntnis: **Bei unstetigen Randfunktionen gilt der Hautsatz die Infinitesimalrechnung nicht für jede Stammfunktion, weil sich diese <u>nicht</u> nur um eine Konstante unterscheiden**!

Vertiefung:
Man wähle wieder FRAC(x) und lasse Derive integrieren.
Derive wählt: (Floor(x)^2 +(1-2x)*Floor(x) + x^2)*(1/2).
Der Plot zeigt einen stetigen Graphen.
Der Lehrer gibt (1/2)*(Floor(x) -x)^2 vor.
Diese Funktion hat die gleiche Ableitung, nämlich FRAC(x), das ist also eine Stammfunktion.
Sie ist jedoch unendlich oft unstetig. Was bedeutet das für den Hauptsatz?

Kurvendiskussion

Für Schüler:
Geben Sie die folgende Funktion ein und lassen Sie diese zeichnen!

x^5-5*x^4+199*x^3/20-197*x^2/20+6063*x/1250-594/625

Hat die Funktion wirklich nur einen Wendepunkt bei x=1 ?
Finden Sie die Wahrheit heraus! Graphisch und rechnerisch!
Tip: Die Nullstellen finden Sie mit LÖSEN-Algebraisch/Vereinfachen
Anschließend: Vereinfachen-Approximieren

Für Lehrerinnen und Lehrer:
Die Zeichnung zeigt zunächst nur einen Wendepunkt. Nur dann, wenn man mehrfach zoomt, sieht man die Extrempunkte. Anschließend zeigt eine vollständige Kurvendiskussion, dass es 5 Nullstellen, 4 Extrempunkte und 3 Wendestellen gibt.

Wie macht man solche Aufgaben? Sie geben ein: (x - 0.8)·(x - 0.9)·(x - 1)·(x - 1.1)·(x - 1.2)
Anschließend wählen Sie: Vereinfachen/Multiplizieren-Multiplizieren.
Das Ergebnis ist die obige Aufgabe. Diese geben Sie den Schülern.

Parallele Funktionsgraphen

Das Problem:

f(x):=x^2 +1 ist durchaus nicht parallel zu g(x):=*x^2*, weil der senkrechte Abstand der Graphen nicht gleich ist!

Welches ist aber die Parallele zu einer Parabel oder zu einem anderen Funktionsgraphen?

Ich definiere eine Funktion und deren Ableitung:

F(x):=x^2

F1(x):=2*x

Vektoriell ist der Graph die Kurve [x,F(x)].

Die Parallelfunktion erhalte ich wenn ich zu jedem Punkt der Kurve das k-fache des Normalen-Einheitsvektors im jeweiligen Punkt hinzuaddiere.

Der Anfangsvektor der Parallelfunktion ist der der Ausgangsfunktion:

va:=[x,F(x)]

Darauf senkrecht steht stets der folgende Normalenvektor der Kurve:

vn:=[-F1(x),1]

Diesen normiere ich auf die Laenge 1:

vn0:=vn/ABS(vn)

Die Parallele fuer den Abstand 2 ist dann:

pf:=va+2*vn0

Rechnet man das aus, ist zu erkennen, dass es keine Parabel ist!

pf:=[x-4*x/SQRT(4*x^2+1),2/SQRT(4*x^2+1)+x^2]

Die Parallele im Abstand k ist dann einfach:

pf:=va+k*vn0

pf:=[x-2*k*x/SQRT(4*x^2+1),k/SQRT(4*x^2+1)+x^2]

Wenn Sie es mit einer anderen Funktion probieren wollen, dann muessen Sie nur oben F(x) und F1(x) aendern.

Damit Derive gleich mehrere Parallelen zeichnet, definiere ich eine Kurvenschar.

Parallelen zur Parabel in den Abstaenden 0, 0.1, 0.2 usw. bis 1:

VEKTOR(pf,k,0,1,0.1)

Nun mit negativen Abstaenden:

VEKTOR(pf,k,0,-1,-0.1)